Squeezed light and the detection of Gravitational Radiation

Sergio Lobo[1]

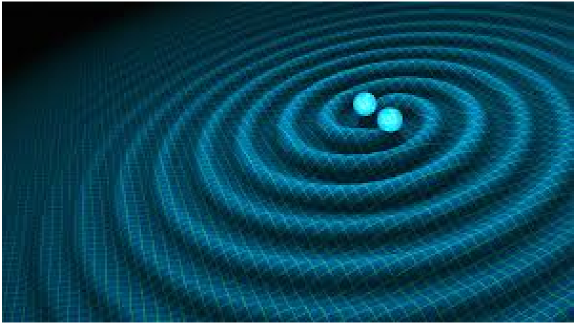
[1]Departamento de Física

Seminario de Óptica Cuántica, 2017

Outline

1. ¿Qué son las ondas gravitacionales?
   - Según la Relatividad General...
   - ¿Qué efectos producen?
2. Squeezed States
   - Oscilador Armónico
   - Estados de combinaciones lineales
   - Squeezed States
   - En Ligo

Outline



Comenzamos con las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}) \tag{1}$$

Hacemos uso de la aproximación de campo débil, (Por qué?)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2}$$

a primer orden en h el tensor de Ricci es

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + O(h^2) \tag{3}$$

y los coeficientes de la conexión

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left[h_{\rho\nu,\mu} + h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\rho}\right] + O(h^2) \tag{4}$$

Usando lo anterior, las ecuaciones de campo quedan de la siguiente manera:

$$\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h^\lambda{}_\nu - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h^\lambda{}_\mu + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h^\lambda{}_\lambda = -16\pi G S_{\mu\nu} \quad (5)$$

Existe una libertad de invarianza gauge que se puede resolver mediante la imposicion de un sistema de coordenadas armónicos, es decir,

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial x^\mu} h^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\mu{}_\mu \quad (6)$$

Dando como resultado

$$\Box^2 h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu} \quad (7)$$

y cuya solución es

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = 4G \int d^3\mathbf{x}' \frac{S_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (8)$$

Plane wave solution

La solución a la ecuación de onda homogenea

$$h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu}\exp(ik_\lambda x^\lambda) + e^*_{\mu\nu}\exp(-ik_\lambda x^\lambda) \tag{9}$$

De tal forma que para que cumpla la ecuación de onda y la condición de coordenadas armónicas debe cumplirse que

$$k_\mu k^\mu = 0 \tag{10}$$

$$k_\mu e^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} k_\nu e^\mu{}_\mu \tag{11}$$

e es conocido como el tensor de polarización.

Outline

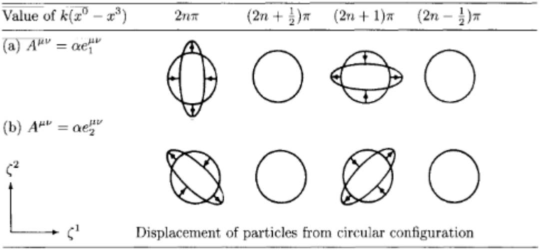


Table 5.1. Effect of a plane wave on a transverse ring of test particles.

'The proper separation between two freely falling particles will oscillate even if their coordinate separation remain constant'

Outline

Oscilador armónico

Comenzamos por definir los operadores de creación y destrucción

$$\hat{a} = (\hat{x} + i\hat{p})/\sqrt{2} \qquad \hat{a}^{+} = (\hat{x} - i\hat{p})/\sqrt{2} \tag{12}$$

De tal forma que

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \qquad \hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{13}$$

Escribiendo $\hat{x}$ y $\hat{p}$ en términos de los operadores creación y destrucción encontramos que

$$\langle x\rangle = \langle p\rangle = 0 \tag{14}$$

$$\langle x^2\rangle = \langle p^2\rangle = n + 1/2 \tag{15}$$

$$var(p) = var(x) = (n + 1/2)^2 \tag{16}$$

Siendo el estado de vació, $n = 0$, uno de mínima incertidumbre.

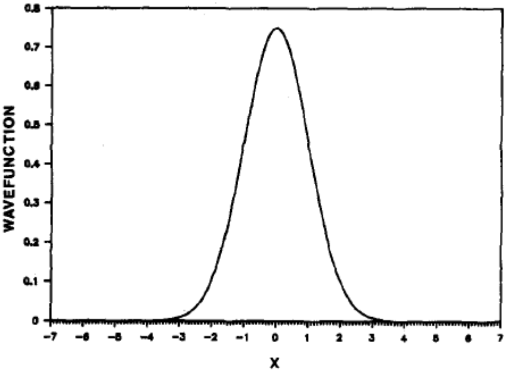


Figure: Magnitud del estado vacío vs posición.

Estacionario, de mínima incertidumbre paquete de onda con ancho constante.

Outline

El número de estado forma un conjunto ortonormal completo:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)|n\rangle \tag{17}$$

En donde los $c_n(t)$ son números complejos y el estado $|n\rangle$ contiene la dependencia de x. La evolución temporal de los $c_n(t)$ está gobernada por la ecuación de Schrödinger.

$$\hat{H} c_n(t)|n\rangle = (n + 1/2) c_n(t)|n\rangle \tag{18}$$

$$i \frac{d}{dt} c_n(t) = \left(n + \frac{1}{2}\right) c_n(t) \tag{19}$$

cuya solución es

$$c_n(t) = c_n(0) e^{i(n+1/2)t} \tag{20}$$

Podemos calcular $\langle x \rangle$ como

$$\langle x \rangle = \sqrt{2} Re(e^{-it} \langle \psi | \hat{a} | \psi \rangle) \tag{21}$$

Comparando esto con la representación en fasores de una cantidad que oscila

$$\langle x \rangle = 2 Re(A e^{-it}) \tag{22}$$

Estados Coherentes

Un estado coherente $|\alpha\rangle$ es aquella combinación lineal de estados $|n\rangle$ cuyos coeficientes al cuadrado $|c_n|^2$ representan la probabilidad de detectar n partículas en una distribución de Poisson con numero medio de partículas $|\alpha|^2$. Estados coherente producen estados de mínima incertidumbre, $\Delta p \Delta x = 1/4$ (estados de producto mínimo). Un estado coherente $|\alpha\rangle$ en un estado propio de $\hat{a}$:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{23}$$

La definición anterior deja de ser tan oscura cuando calculamos la probabilidad de encontrar n cuantos en el oscilador (o equivalente, una energía de $n + 1/2$).

$$P_n = |c_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \left[\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \right] \tag{24}$$

Es decir, P_n es la probabilidad de detectar n eventos independientes en un periodo dado de tiempo si $\langle n \rangle = ||^2$ es el número medio de eventos por intervalo de tiempo. Además,

$$var(x) = var(p) = 1/2 \tag{25}$$

i.e. Todos los estados coherentes son estados de producto mínimo con varianza igual la del estado de vacío.

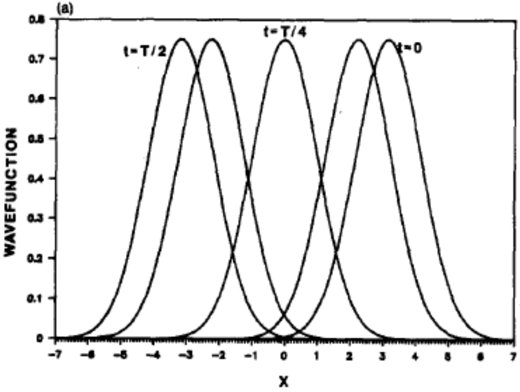


Figure: Paquete de ondas oscilando en varios tiempos*

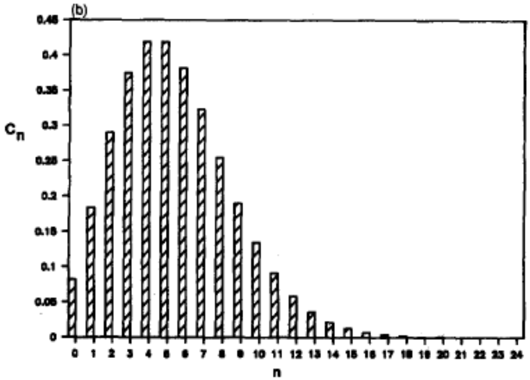


Figure: Estado coherente con 5 cuantos en promedio

Outline

Un estado se dice que está "squeezed" si sus varianzas oscilan y se vuelven más pequeñas que las del estado de vacío. Si el valor mínimo del producto es 1/4, entonces el estado se llama: "minimun-uncertainty squeezed state". Para obtenerlos, comenzamos definiendo:

$$\hat{b} = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^{+} \tag{26}$$

$$\hat{b}^{+} = \mu * \hat{a}^{+} + \nu * \hat{a} \tag{27}$$

Un estado squeezed $|\beta\rangle$ es un estado propio de $\hat{b}$

$$\hat{b}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle \tag{28}$$

Expresando $|\beta\rangle$ como una combinación lineal de $|n\rangle$ e igualando coeficientes, se encuentra una relación de recursión para c_n.

	Coherent	Squeezed
$\langle x \rangle$	$\sqrt{2}\,\alpha \cos t$	$\sqrt{2}\,\beta(\mu - \nu)\cos t$
$\langle p \rangle$	$-\sqrt{2}\,\alpha \sin t$	$-\sqrt{2}\,\beta(\mu - \nu)\sin t$
$\langle n \rangle$	α^2	$\beta^2(\mu - \nu)^2 + \nu^2$
$\mathrm{var}\langle x \rangle$	$\frac{1}{2}$	$(\mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu \cos 2t)/2$
$\mathrm{var}(p)$	$\frac{1}{2}$	$(\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cos 2t)/2$
$\mathrm{var}(n)$	α^2	$\beta^2(\mu - \nu)^4 + 2\mu^2\nu^2$

Figure: Comparación de valores*

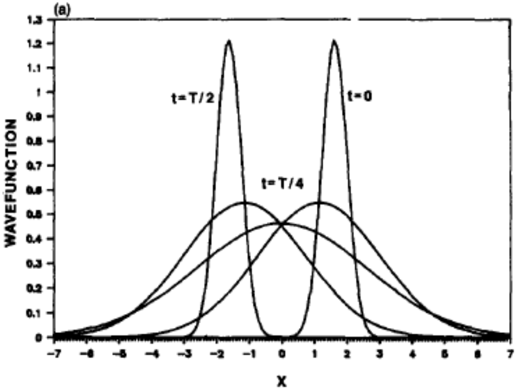


Figure: los paquetes de onda "respiran"*

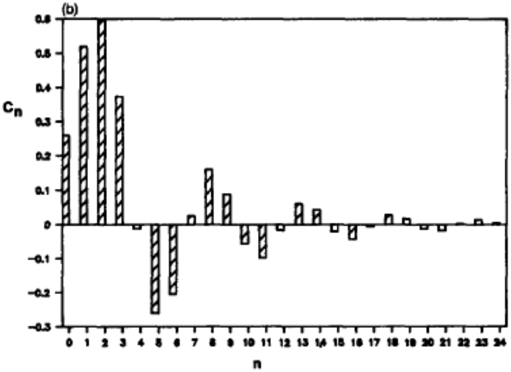


Figure: Coeficientes en t= 0 (no-Poisson)*

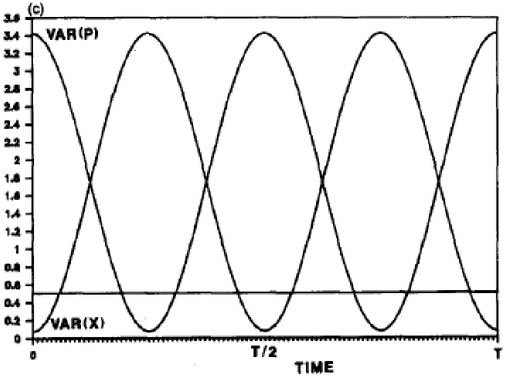


Figure: Varianzas vs tiempo*

Outline

1. ¿Qué son las ondas gravitacionales?
   - Según la Relatividad General...
   - ¿Qué efectos producen?
2. Squeezed States
   - Oscilador Armónico
   - Estados de combinaciones lineales
   - Squeezed States
   - En Ligo

- Irregularidad en la llegada de fotones al detector (shot noise)
- Presión de Radiación

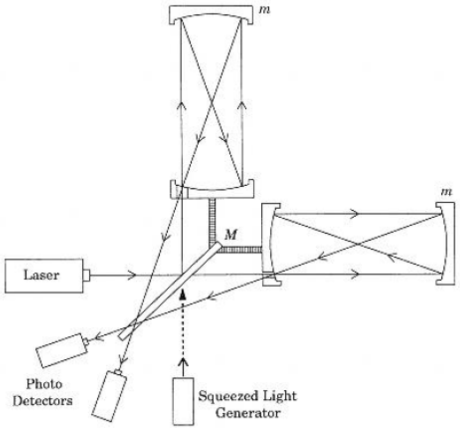


Figure: Esquema del Interferómetro usado en LIGO

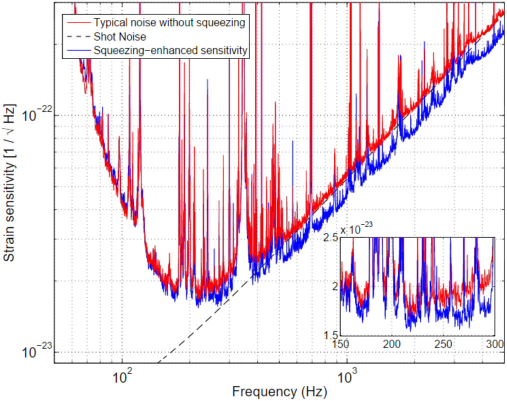


Figure: Mejoramiento de Ligo

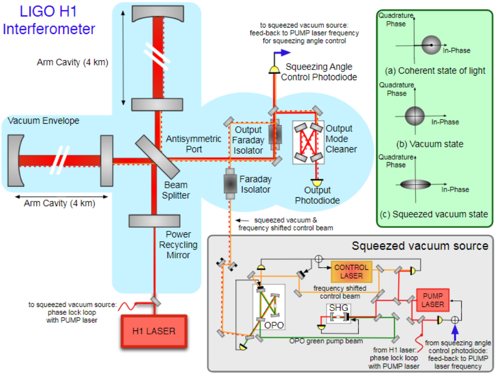
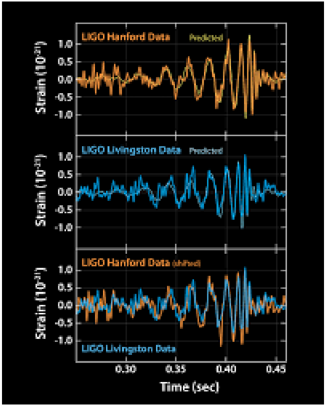


Figure: Interferómetro usado en LIGO

The end


LIGO Hanford Data
Predicted
Strain (10⁻²¹)
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
LIGO Livingston Data
Predicted
Strain (10⁻²¹)
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
LIGO Hanford Data (shifted)
Strain (10⁻²¹)
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
LIGO Livingston Data
0.30
0.35
0.40
0.45
Time (sec)

For Further Reading I

Henry, Richard W and Glotzer, Sharon C
A squeezed-state primer, 1988.
American Journal of Physics.