

Uso de una “Tunable Beam Displacer” para estudios de decoherencia

Andrés Felipe Herrera Fernandez* e Iván Mauricio Burbano Aldana**
Departamento de Física, Universidad de los Andes, A.A. 4976-12340, Bogotá, Colombia
(Fecha: 28 de febrero de 2019)

La “Tunable Beam Displacer” (TBD) simula la decoherencia debida a la interacción de un sistema cuántico con su ambiente. Proponemos hacer uso de la tomografía cuántica para examinar la pureza de estados de polarización que hayan interactuado con la TBD.

Palabras Clave: Tunable Beam Displacer, tomografía, polarización, pureza, decoherencia.
Dirigido por: Prof. Alejandra Catalina Valencia González

I. INTRODUCCIÓN

Las aplicaciones de sistemas cuánticos son múltiples. Entre estas se encuentran la computación y comunicación cuántica¹, los puntos cuánticos², la tomografía por resonancia magnética³ y el estudio de sistemas fotosintéticos⁴. Sin embargo, la interacción de estos sistemas con su ambiente constituye uno de los mayores problemas en el desarrollo de dispositivos cuánticos. Debido a esta, la información cuántica contenida en el sistema se pierde en el ambiente mediante un proceso conocido como decoherencia cuántica⁵. Por esta razón es importante desarrollar técnicas experimentales que permitan la caracterización de este fenómeno. Esto se realizará con el fin de poder implementar experimentalmente los efectos de la decoherencia cuántica a tecnologías cuánticas para poder perfeccionarlas.

En este experimento se realizará una simulación⁶ del fenómeno de decoherencia. La óptica cuántica permite hacer este tipo de simulaciones debido al número de sistemas controlables que se pueden poner en interacción^{7,8}. La TBD es un dispositivo óptico que simula la decoherencia mediante el acoplamiento de la polarización, como sistema cuántico, y los grados de libertad espaciales, como ambiente^{9,10}. En otras palabras, luego de que un haz de luz interactúe con la TBD se observará que para el caso de una superposición de estado en la base vertical-horizontal habrá una separación del haz inicial en dos haces que corresponden a una polarización vertical y horizontal. De tal forma, que la separación entre los centroides de estos haces se denotará con el parámetro d_c y nos permitirá relacionar este parámetro con el ángulo de rotación de la TBD. Esta situación será explicada detalladamente más adelante.

En este experimento proponemos caracterizar el efecto de la TBD sobre estados de polarización puros. La decoherencia se puede estudiar al analizar la pureza de los estados resultantes. Para poder determinar estos estados resultantes se utilizará la técnica de tomografía cuántica¹¹. Además, mediante un proceso de calibración de la TBD, podremos entender la relación entre sus parámetros y la decoherencia observada.

Para lograr lo antes estipulado, se tiene el siguiente objetivo general junto con sus objetivos específicos:

- Caracterizar el efecto causado por una “Tunable

Beam displacer” a un estado de polarización puro de luz.

1. Comprender el funcionamiento de materiales ópticos tales como una lámina de media onda, cuarto de onda y el Polarization Beam Splitter (PBS).
2. Crear una curva de calibración para que permita relacionar el ángulo de la TBD a la separación d_c .
3. Usar la técnica de tomografía cuántica para determinar los estados de la luz y lograr diferenciar entre un estado puro y un estado mixto.

II. MARCO TEÓRICO

Empezaremos por una descripción simple del fenómeno de decoherencia cuántica. Considere un sistema cuántico en interacción con su ambiente. Por simplicidad modelaremos esta situación como un sistema bipartito, es decir, asumiremos que el sistema cuántico se puede describir mediante un espacio de Hilbert \mathfrak{h} , su ambiente mediante \mathcal{H} y el sistema compuesto por $\mathfrak{H} \otimes \mathcal{H}$. Si asumimos a este último como aislado, su evolución en un tiempo t estará dada por un operador unitario U en $\mathfrak{H} \otimes \mathcal{H}$. Ahora bien, suponga que preparamos un estado $|\phi\rangle \in \mathfrak{H}$, de manera que el estado inicial del sistema compuesto es separable, es decir, toma la forma $|\phi\rangle \otimes |\xi\rangle$ para algún $|\xi\rangle \in \mathcal{H}$. Después de que el tiempo t halla transcurrido, el sistema se encontrará en el estado $U|\psi\rangle$. Esto induce una dinámica sobre el sistema inicial. Al no tener acceso al ambiente, el estado cuántico efectivo sobre nuestro sistema de interés sería descrito por el operador densidad

$$\rho = \text{tr}_{\mathcal{H}}(U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger). \quad (1)$$

Como veremos más adelante, este puede ser mixto, evidenciando la pérdida de información del sistema descrito por \mathfrak{H} hacia el ambiente.

El uso de una TBD como medio para simular la decoherencia cuántica en un sistema cuántico de fotones ha sido estudiado con anterioridad¹⁰. En particular, la forma en que se desarrolla la caracterización de esta se encuentra detallada en este artículo. El tratamiento de

la polarización de un fotón se puede hacer mediante el cálculo de Jones¹². En este se propone asignarle al sistema un espacio de Hilbert \mathbb{C}^2 con $|H\rangle := (1, 0)$ el estado con polarización horizontal y $|V\rangle := (0, 1)$ el estado con polarización vertical. Por otra parte, el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2)$ puede ser asignado a los grados de libertad espaciales. En este, el estado simbólico $|\mathbf{q}\rangle$ representa un fotón con momento transversal $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$.

Suponga ahora que se tiene un estado inicial separable

$$|\psi\rangle = |\phi, \xi\rangle := |\phi\rangle \otimes |\xi\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^2) \quad (2)$$

con

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \alpha |H\rangle + \beta |V\rangle, \\ |\xi\rangle &= \int d\mathbf{q} f(\mathbf{q}) |\mathbf{q}\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

normalizados. La TBD moverá a los fotones de polarización horizontal una distancia d_c . A los fotones con polarización vertical los moverá la misma distancia en la dirección contraria. En vista de que el momento es el generador infinitesimal de traslaciones, la acción de la TBD en el sistema se puede modelar con un operador unitario $U(d_c)$ definido mediante las ecuaciones simbólicas

$$\begin{aligned} U(d_c) |H, \mathbf{q}\rangle &= e^{id_c q_y} |H, \mathbf{q}\rangle, \\ U(d_c) |V, \mathbf{q}\rangle &= e^{-i(d_c q_y + \varphi)} |V, \mathbf{q}\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

El estado de polarización resultante gracias a la interacción de $|\psi\rangle$ con la TBD se obtiene con la traza parcial

$$\rho := \text{tr}_{L^2(\mathbb{R}^2)}(U(d_c) |\psi\rangle\langle\psi| U(d_c)^\dagger). \quad (5)$$

Esta matriz densidad en general será mixta evidenciando la decoherencia debida a la interacción entre la polarización y los grados de libertad espaciales. Ya que esta actúa sobre \mathbb{C}^2 , geoméricamente la podremos describir con la esfera de Bloch mediante los parámetros (S_0, S_1, S_2, S_3) de Stokes¹³

$$S_i := \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(\rho \sigma_i) \iff \rho = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i \sigma_i, \quad (6)$$

con $\sigma_0 = \text{id}_{\mathbb{C}^2}$ y $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ las matrices de Pauli. Estos parámetros se pueden expresar de la forma¹¹

$$\begin{aligned} S_0 &= P_{|H\rangle} + P_{|V\rangle} = 1, \\ S_1 &= P_{|D\rangle} - P_{|A\rangle}, \\ S_2 &= P_{|R\rangle} - P_{|L\rangle}, \\ S_3 &= P_{|H\rangle} - P_{|V\rangle}, \end{aligned} \quad (7)$$

donde $P_{|\Phi\rangle}$ es la probabilidad de medir la polarización descrita por $|\Phi\rangle \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned} |D\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle), \\ |A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle), \end{aligned} \quad (8)$$

describen los estados de polarización diagonal y antidiagonal respectivamente, y

$$\begin{aligned} |R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle), \\ |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle), \end{aligned} \quad (9)$$

describen los estados de polarización circular derecha e izquierda respectivamente. Esto provee la prescripción experimental, conocida como tomografía cuántica, que se utilizará para medir el estado ρ . Se espera utilizar esta representación para entender los cambios en la pureza de ρ en función de d_c .

Con una preparación Gaussiana se obtiene un estado espacial inicial

$$f(\mathbf{q}) \propto e^{-w_y^2 \frac{(q_y - q_{0y})^2}{4}}, \quad (10)$$

donde w_y es el ancho del haz de fotones y q_{0y} es el centro de su distribución de momentos transversales. Estos parámetros se pueden encontrar experimentalmente estudiando la interferencia entre los dos haces producidos por la TBD¹⁴. Esta debería producir el patrón de intensidades

$$I(d_c) = \frac{I_0}{2} \left(1 + e^{-2d_c^2/w_y^2} \cos(2q_{0y} d_c + \varphi) \right). \quad (11)$$

Aplicando la ecuación (5) a la distribución (10) se obtiene un estado de polarización final

$$\rho = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha \bar{\beta} e^{-\frac{2d_c^2}{w_y^2}} e^{i(2d_c q_{0y} + \varphi)} \\ \bar{\alpha} \beta e^{-\frac{2d_c^2}{w_y^2}} e^{-i(2d_c q_{0y} + \varphi)} & |\beta|^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

en la base $(|H\rangle, |V\rangle)$. Por lo tanto, manteniendo la preparación del haz inicial constante, se puede controlar el estado resultante cambiando la polarización de la entrada a la TBD.

III. MARCO EXPERIMENTAL

El procedimiento experimental que se llevará a cabo para cumplir con el objetivo principal de esta propuesta es descrito en la figura 1. Este consiste de 4 etapas principales. La primera radica en asegurarse de obtener un haz Gaussiano, el cual es obtenido mediante un láser acoplado a una fibra óptica mono-modo. La segunda etapa es la preparación de una polarización específica para los fotones que se usarán en los siguientes procesos. En este caso se prepara una polarización vertical mediante un filtro polarizador. Posteriormente, en la tercera etapa se implementa el montaje experimental para la TBD, desarrollado por el grupo de Óptica Cuántica de la Universidad de los Andes⁹. Una representación esquemática se muestra en la figura 2. Esta consiste en dos espejos y un PBS montados sobre una plataforma que puede rotar. La TBD

permite separar haces en componentes de distintas polarizaciones. La distancia entre estos haces se puede controlar mediante el ángulo de rotación de la plataforma. Finalmente, en la última etapa se realiza la tomografía cuántica. La técnica para realizarla se encuentra descrita en¹¹. Específicamente, la tomografía cuántica es el proceso mediante el cual un estado cuántico es reconstruido al tomar diferentes medidas a una serie de sistemas (en este trabajo el sistema es el fotón). Si consideramos que el fotón puede estar polarizado en tres bases distintas: horizontal, diagonal y circular; al efectuar 3 mediciones, cada una en una de las 3 bases, se logra determinar su grado de polarización en cada una de estas. Por lo tanto, se puede conocer la pureza del estado cuántico de los sistemas de llegada al punto en el cual se realiza la tomografía. Además, a partir de estas medidas se logra describir la matriz densidad de un conjunto de estados que permite diferenciar un estado puro de un estado mixto.

Cabe aclarar, que para relacionar el ángulo de la TBD y la distancia entre los centroides se hizo una selección de haces mediante un polarizador antes de la TBD para poder hacer un análisis más detallado del movimiento de cada uno de estos. Así mismo, para obtener el patrón de interferencia y la curva de calibración de la TBD que se mostraran más adelante, es necesario modificar la cuarta etapa. En este caso, la cuarta etapa es sustituida al posicionar una cámara CCD que permite observar los centroides y su separación en función del ángulo de la TBD. Y finalmente, al posicionar un filtro polarizador en posición diagonal y un power meter luego de la TBD, es posible medir la intensidad obtenida en función del ángulo para obtener el patrón de interferencia.

En conclusión, podremos determinar la relación entre la separación de los centroides de los haces d_c y el ángulo de rotación de la plataforma θ e igualmente, obtener el patrón de interferencia mediante el cual se conocerán los valores del q_{0y} y w_y . Finalmente, podremos observar el efecto del ángulo de rotación de la plataforma sobre la pureza de un conjunto de fotones mediante la técnica de tomografía cuántica.

IV. RESULTADOS

Agregando la CCD al montaje de la figura 1 como se describe en la sección III, se lograron obtener imágenes de los haces resultantes de la TBD. En primer lugar, nos aseguramos que el desplazamiento de estos como respuesta a la rotación de la TBD fuese horizontal. Como muestra la figura 3, esto se logró de manera satisfactoria. Aunque a primera vista la dispersión vertical parece ser grande, esta es pequeña comparada con el movimiento horizontal de los haces. Esto nos permite calcular los parámetros del ajuste de la figura con una alta precisión. Es importante notar que si no se observa este comportamiento horizontal en futuras medidas, este tipo de análisis se puede utilizar para rotar los datos y continuar con el análisis.

En segundo lugar, se encontró la curva de calibración

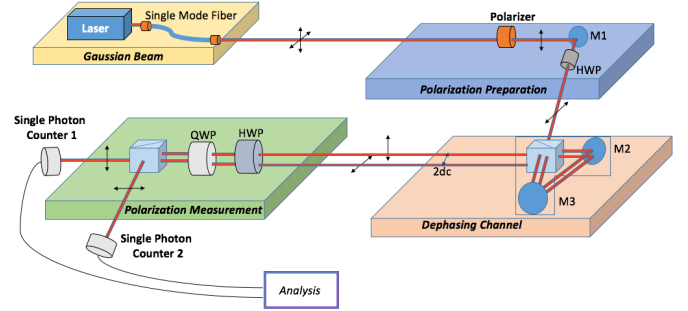


Figura 1. Secuencia que se seguirá experimentalmente para estudiar el efecto de la decoherencia cuántica sobre un estado puro. La TBD simula un ambiente con el cual interactúa nuestro sistema cuántico.

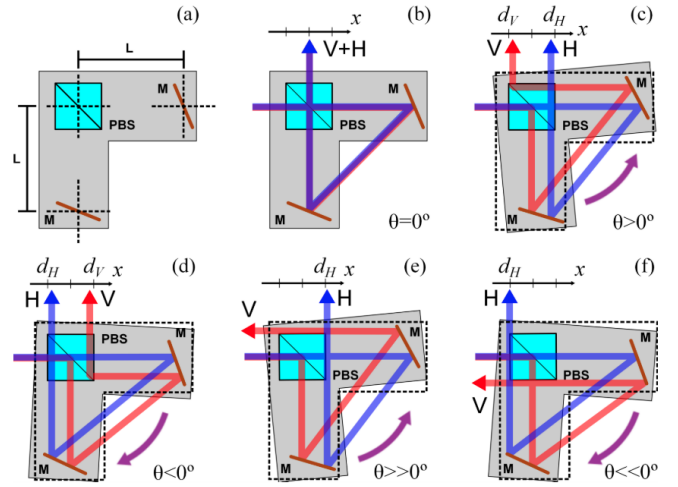


Figura 2. Se muestran las distintas configuraciones del TBD. En (a) se muestra la TBD que consiste de dos espejos M a una distancia L de un PBS montados sobre una plataforma rotante. En (b) se muestra que no se alteran los grados de libertad espaciales del haz cuando la plataforma está a $\theta = 0$. En (c) y (d) se muestran la separación de los haces con polarizaciones ortogonales que se logra para rotaciones $\theta > 0$ y $\theta < 0$ de la plataforma. En (e) y (f) se muestran las rotaciones críticas en los cuales se pierde alguna de las polarizaciones. Tomada de la referencia 9.

de la TBD que nos permite relacionar su ángulo de rotación con el desplazamiento de los haces. Estas resultaron ser

$$\begin{aligned} d_V &= 70.956(9) \mu\text{m}/^\circ\theta - 28(2) \mu\text{m}, \\ d_H &= -57.61(1) \mu\text{m}/^\circ\theta + 42(2) \mu\text{m}. \end{aligned} \quad (13)$$

Notamos que las pendientes de ambas curvas son distintas. Esto parece indicar que los haces con distintas polarizaciones responden de manera distinta a la TBD. Esto no se reporta en los experimentos realizados anteriormente con montajes similares^{9,10,14}. Sin embargo, por el momento no se han hecho las suficientes medicio-

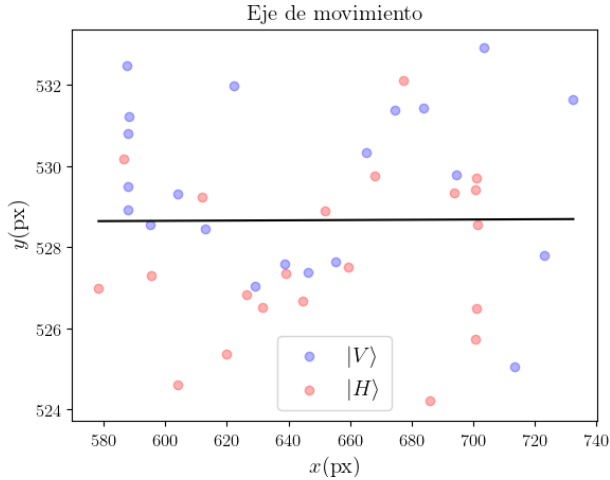


Figura 3. Dispersión de los centroides de los haces con polarización horizontal y vertical debido a la rotación de la TBD. La línea negra muestra un ajuste lineal a estos datos. Esta tiene pendiente 0.000(8) y un intercepto con el eje vertical de 528(5) px. Las incertidumbres experimentales de los datos se encuentran dentro del tamaño de los marcadores utilizados.

nes para poder determinar la validez de este resultado o su origen. Como hipótesis preliminar, creemos que la discrepancia proviene de la manera en la que se seleccionaron los haces. Como se explica en la sección III, esto se hizo colocando un polarizador antes de la entrada a la TBD. Estos polarizadores son largos y pueden desviar el eje óptico, invalidando la calibración previa. Por otra parte, los interceptos horizontales de los ajustes indican la necesidad de una compensación en los ángulos de la TBD. En efecto, la alineación de la TBD requiere que en el ángulo 0 no haya separación de los haces. Estos ajustes nos permiten realizar esta corrección en el análisis de datos posteriores e inferir la separación de los haces a partir de la rotación de la TBD.

Finalmente, se realizó la caracterización del haz entrante a la TBD con el método de interferencia¹⁴ dado por la ecuación (11). Si bien todavía no se ha realizado el análisis de errores correspondiente al ajuste de esta, la correspondencia cualitativa entre los datos experimentales y el ajuste da confianza sobre los parámetros encontrados. En efecto, todos se encuentran en el mismo orden de magnitud que los reportados anteriormente¹⁴. Sin embargo, hay dos observaciones importantes para hacer. Por una parte, se obtuvo un ángulo de desfase φ cercano a $\pi/2$. Si cada reflexión genera un desfase de $\pi/2$, en vista de que un haz realiza dos reflexiones más que el otro, se esperaría un desfase neto de π . Por otra parte, fue necesario hacer un desplazamiento compensatorio de 29(4) μm a las distancias entre los haces para que la envolvente exponencial en (11) coincidiera con los datos. Esto indica una falla en la compensación en la figura 4. Sin embargo, al tener en cuenta que la derivación de (11) asume la correspondencia entre las pendientes en (13), estas ob-

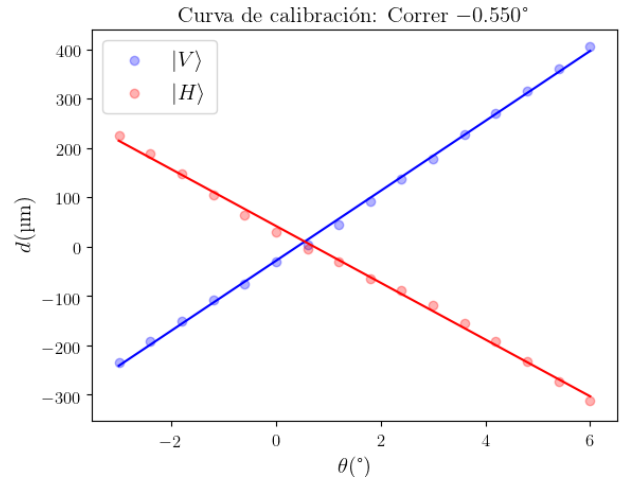


Figura 4. Se muestra la posición de los centroides de ambos haces a lo largo de la línea encontrada en la figura 3 en función del ángulo de rotación de la TBD. El origen de este eje se definió como el promedio del par de centroides más cercanos. Las líneas sólidas corresponden a ajustes lineales hechos sobre los datos del color correspondiente. Las incertidumbres experimentales se encuentran dentro del tamaño de los marcadores.

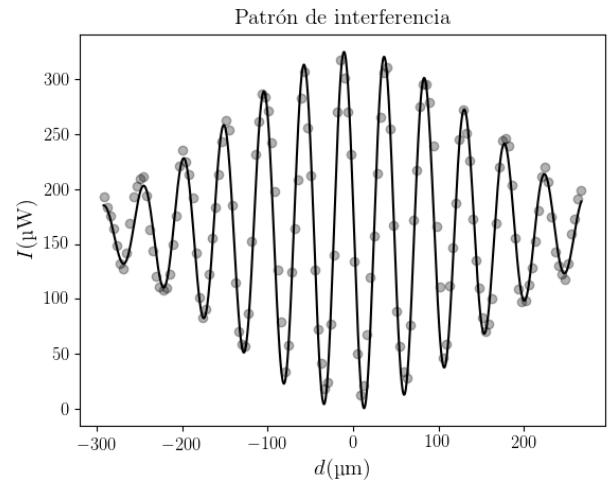


Figura 5. Patrón de interferencia entre dos haces producido de la TBD. El ajuste se realizó con $I_0 = 325(3) \mu\text{W}$, $w_y = 294(8) \mu\text{m}$, $q_{0,y} = 0.0668(1) \mu\text{m}^{-1}$ y $\varphi = 1.4(6) \text{ rad}$ con respecto a la ecuación (11).

servaciones deben ser tratadas después de dar una solución satisfactoria a la discrepancia entre las pendientes en (13).

Si bien no pudimos realizar la tomografía cuántica propuesta, el ajuste realizado en la figura 5 nos permite hacer una simulación de los resultados. En efecto, la ecuación (12) muestra que el estado en polarización posterior a la TBD solo depende de este ajuste y el estado entrante. Nuestro montaje asegura que los fotones entran en una

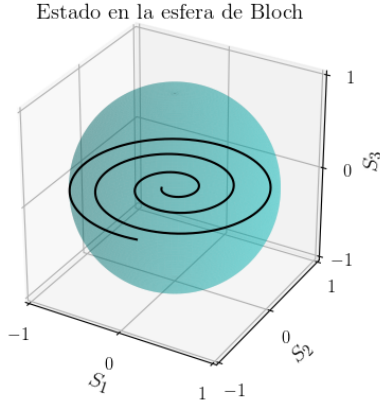


Figura 6. Se muestra la trayectoria que \mathbf{S} traza al cambiar d_c . El punto en el borde de la esfera se obtiene en $d_c = 0$. Este se mueve en una espiral hacia el centro a medida que d_c aumenta. La simulación se realizó con (12), el ajuste de la figura 5, y la escogencia de un estado inicial con $\alpha = \beta = 2^{-1/2}$.

polarización diagonal $\alpha = \beta = 2^{-1/2}$. De esta manera podemos calcular ρ y los parámetros de Stokes correspondientes. Tomando $\mathbf{S} := (S_1, S_2, S_3) \in B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3$, cada operador densidad determina un vector en la bola unitaria. Los estados puros se encuentran en la frontera, conocida como la esfera de Bloch. A medida que el radio $\|\mathbf{S}\|$ disminuye, el estado se va mezclando. Esto indica la decoherencia de nuestro estado hacia el ambiente. Este es producto del enredamiento producido entre los grados de polarización y los espaciales. En vista de que la pureza, definida como¹⁵

$$P := \text{tr}(\rho^2) = \frac{1}{2}(1 + \|\mathbf{S}\|^2), \quad (14)$$

está directamente relacionada con este radio, la podemos utilizar como una medida de este enredamiento. $P = 1$ corresponde a un estado puro mientras que $P = 0,5$ corresponde a un estado máximamente mixto.

La trayectoria trazada por \mathbf{S} al cambiar d_c se muestra en la figura 6. Se nota cómo la operación cuántica (4) produce que el estado sufra decoherencia en forma de *espiral* a medida que la separación de los haces aumenta. Esto produce la variación en la pureza mostrada en la figura 7. Estos en particular coinciden con los resultados mostrados en la referencia 10. Se espera entonces que los resultados obtenidos calculando los parámetros de Stokes mediante la medición de (7) coincidan con los mostrados en estas figuras.

V. CONCLUSIONES - TRABAJO FUTURO

Durante el desarrollo de este trabajo logramos comprender el funcionamiento de materiales ópticos tales co-

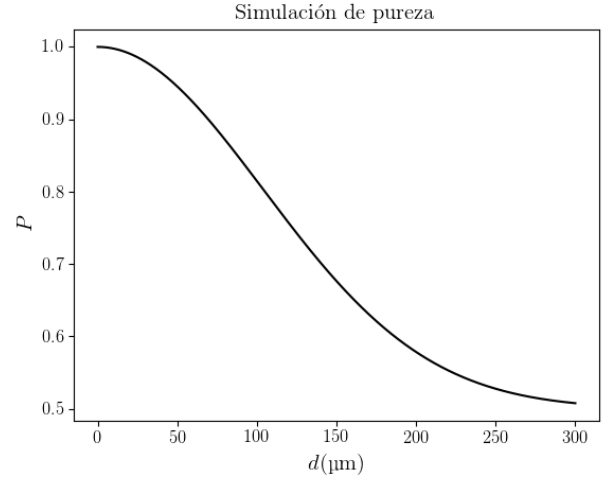


Figura 7. Se muestra la pureza del estado a medida que d_c cambia. Esta se obtiene utilizando (14) sobre la simulación mostrada en la figura 6.

mo una lamina de media onda, cuarto de onda y el Polarization Beam Splitter. Así mismo, al implementar el uso de una TBD pudimos estudiar la dinámica del sistema en cuestión. Específicamente, se realizó una curva de calibración que permitió relacionar el ángulo de la TBD con la separación d_c . Igualmente, la curva de calibración indicó que el cero de la TBD se debe ajustar $\theta = -0.55^\circ$. De igual modo, se observó que efectivamente el movimiento de los centroides es horizontal y no se deben hacer modificaciones en ese aspecto. Finalmente, mediante el patrón de interferencia fue posible determinar los valores de los parámetros q_{0y} , w_y y φ que fueron utilizados para realizar la simulación indicada en la figura 6 y 7.

Por otra parte, para un trabajo futuro se completará el objetivo general 3 que no fue realizado en su totalidad. De este objetivo, se realizó una simulación de la pureza en función de la separación de los centroides que indica un decaimiento exponencial de la pureza para una polarización diagonal causado por la TBD. Por lo tanto, falta obtener los resultados experimentales de la tomografía cuántica para poder corroborar este decaimiento exponencial. De igual modo, de la tomografía cuántica se pueden extraer los valores experimentales de los parámetros de Stokes (S_0, S_1, S_2, S_3) para diferentes valores del d_c y así poder compararlos con los parámetros respectivos de (7) y (13). Finalmente, estos parámetros de Stokes obtenidos experimentalmente permitirán mostrar gráficamente el cambio en la matriz densidad (13) mediante la esfera de Bloch para así observar el comportamiento de transición entre un estado puro a un estado mixto y poder compararlo con la simulación mostrada en la figura 6.

Como consecuencia de lo expuesto, logramos reafirmar que la TBD simula la decoherencia debida a la interacción de un sistema cuántico con su ambiente. De igual modo, logramos caracterizar la TBD y obtener parámetros que

permitirán usarla en el estudio de implementaciones ex-

perimentales que busquen simular situaciones en las que la decoherencia cuántica juega un papel importante.

* af.herrera14@uniandes.edu.co

** im.burbano10@uniandes.edu.co

- ¹ G. Arun and Vivekanand Mishra, “A review on quantum computing and communication,” Proceedings on 2014 2nd International Conference on “Emerging Technology Trends in Electronics, Communication and Networking”, ET2ECN 2014 **1**, 9–13 (2015).
- ² Kerry Vahala, “Optical microcavities,” Advanced series in applied physics **424**, xiii, 502 p. (2004).
- ³ Donald B. Plewes and Walter Kucharczyk, “Physics of MRI: A primer,” Journal of Magnetic Resonance Imaging **35**, 1038–1054 (2012).
- ⁴ Alexandra Olaya-Castro, Chiu Fan Lee, Francesca Fassioli Olsen, and Neil F. Johnson, “Efficiency of energy transfer in a light-harvesting system under quantum coherence,” Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics **78**, 1–7 (2008).
- ⁵ Wojciech Hubert Zurek, “Decoherence, Eigenselection and the Quantum Origins of the Classical,” Reviews of Modern Physics **75**, 715–775 (2003), arXiv:0105127v3 [quant-ph].
- ⁶ I. M. Georgescu, S. Ashhab, and Franco Nori, “Quantum Simulation,” Reviews of Modern Physics **86**, 153 (2014).
- ⁷ Jong-Chan Lee, Youn-Chang Jeong, Yong-Su Kim, and Yoon-Ho Kim, “Experimental demonstration of decoherence suppression via quantum measurement reversal,” Optics Express **19**, 16309–16316 (2011).
- ⁸ B. Marques, A. A. Matoso, W. M. Pimenta, A. J. Gutiérrez-Esparza, M. F. Santos, and S. Pádua, “Experimental simulation of decoherence in photonics qudits,” Scientific Reports **5** (2015), 10.1038/srep16049.
- ⁹ Luis José Salazar-Serrano, Alejandra Valencia, and Juan P. Torres, “Tunable beam displacer,” Review of Scientific Instruments **86**, 10–13 (2015).
- ¹⁰ Daniel F. Urrego, Juan-Rafael Álvarez, Omar Calderón-Losada, Jiří Svozilik, Mayerlin Nuñez, and Alejandra Valencia, “Implementation and characterization of a controllable dephasing channel based on coupling polarization and spatial degrees of freedom of light,” Optics Express **26**, 525–528 (2017).
- ¹¹ David Jiménez Barrero, “Quantum State Tomography of Polarization States: An Exploration of Quantum Logic Gates,” <http://repositorio.uniandes.edu.co/xmlui/handle/1992/14413> (2014).
- ¹² Grant R Fowles, *Introduction to Modern Optics*, 2nd ed. (Dover Publications, 1989).
- ¹³ S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer* (Oxford, 1950).
- ¹⁴ Jefferson Flórez, Juan Rafael Álvarez, Omar Calderón-Losada, Luis José Salazar-Serrano, and Alejandra Valencia, “Interference of two pulse-like spatial beams with arbitrary transverse separation,” Journal of Optics (United Kingdom) **18** (2016), 10.1088/2040-8978/18/12/125201.
- ¹⁵ Gregg Jaeger, *Quantum Information: An Overview* (Springer, 2007).