

Grupos Unitarios e Interferometría

Jorge Alejandro Ontibon,^{*} Alejandra Catalina Valencia,^{**} and Alonso Botero^{***}
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 6 de junio de 2024)

Las transformaciones unitarias, representadas por grupos de simetría $U(N)$, son fundamentales en diversos contextos físicos. En particular, la óptica lineal ofrece una amplia gama de procesos físicos conservativos que pueden modelarse mediante matrices unitarias. Un ejemplo de esto son los divisores de haz (Beam Splitters). En este trabajo, se investiga la conexión entre los grupos unitarios y un interferómetro. Para ello, se empleó un láser de helio-neón y un montaje tipo Mach-Zehnder para recopilar datos sobre la potencia de la interferencia en función de la fase inducida por la diferencia en los caminos ópticos, así como la dependencia de esta potencia con respecto a la transmitancia del Beam Splitter. Los resultados obtenidos confirman que este tipo montajes pueden ser descritos mediante transformaciones unitarias siempre que se preserve el carácter conservativo del experimento.

I. INTRODUCCIÓN

Existen múltiples aplicaciones de la óptica lineal, por ejemplo, en computación cuántica. Un ejemplo es el Boson Sampling, un problema de computación cuántica no universal propuesto por Scott Aaronson y Alex Arkhipov[1]. En particular, se ha demostrado una ventaja del computador cuántico respecto al computador clásico para este fenómeno físico. Esto resalta las conexiones entre la interferometría pensada como transformaciones unitarias y las aplicaciones tanto experimentales como prácticas.

A. Marco Teorico

En física, los grupos son fundamentales para entender las transformaciones unitarias en sistemas cuánticos, como los asociados a los Beam Splitters. Un grupo (G, \circ) cumple axiomas como la cerradura bajo la operación binaria y la existencia de la identidad e inverso. Nos enfocamos en los grupos unitarios $U(N)$. Los elementos de $U(N)$ deben ser unitarios ($UU^\dagger = 1$) y tienen determinante ± 1 . Los elementos con determinante $+1$ forman el subgrupo $SU(N)$ [6]. Para un elemento R del grupo $SU(2)$ es útil la parametrización:

$$R = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Donde los α , β y γ son los ángulos de Euler [3]. De forma alternativa es posible definir una parametrización

con parámetros equivalentes a los ángulos de Euler, de tal manera que

$$R = \exp\left(\frac{i}{2}\xi\sigma_2\right) \exp\left(\frac{i}{2}\eta\sigma_3\right) \exp\left(\frac{i}{2}\zeta\sigma_2\right) \quad (2)$$

Donde los operadores σ_i son las matrices de Pauli. Un haz de luz puede ser descrito como una onda electromagnética, donde debido a las relaciones entre el campo eléctrico y magnético, puede ser explicado completamente mediante un campo eléctrico oscilante. En términos de un vector unitario de polarización, se puede definir [2]:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \boldsymbol{\mathcal{E}}. \quad (3)$$

En principio, un detector no responde directamente ante la onda eléctrica, sino que lo hace por la intensidad incidente sobre él. Usando la ecuación (3) se define la intensidad como:

$$I = |\mathbf{E}|^2 = \overline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} = \overline{E_0} E_0 \quad (4)$$

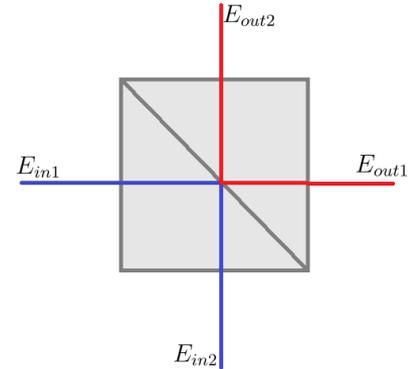


Figura 1: Diagrama para de un Beam Splitter donde los haces azules indican estados de entrada, mientras que los rojos estados de salida

^{*} Correo institucional: j.ontibon@uniandes.edu.co

^{**} Asesora; Correo institucional: ac.valencia@uniandes.edu.co

^{***} Asesor; Correo institucional: abotero@uniandes.edu.co

Basándonos en la figura 1 se definen dos vectores que contengan la información de los campos de entrada como de salida, de manera que el Beam Splitter induce una transformación unitaria R en dichos estados, en específico una matriz del grupo $SU(2)$ [4], de tal manera que:

$$\begin{pmatrix} E_{out1} \\ E_{out2} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} E_{in1} \\ E_{in2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{E}_{out} = R \mathbf{E}_{in}. \quad (6)$$

Además, si consideramos un interferómetro en el cual se preserven ciertas condiciones de conservación, es posible definir de igual manera una transformación general $R(\alpha, \beta, \gamma) \in SU(2)$ que modele el montaje en la referencia [8], como en la ecuación (1). El parámetro γ tendrá la interpretación de fase entre los haces incidentes, el parámetro α corresponde a la fase entre los haces finales, mientras que β tendrá relación con la transmitancia y reflectancia del divisor de haz, siguiendo las siguientes relaciones:

$$t = \sin \frac{\beta}{2} \quad r = \cos \frac{\beta}{2}. \quad (7)$$

B. Alternativas a la Implementación de transformaciones unitarias

Existen múltiples implementaciones de transformaciones unitarias en el contexto de la óptica. Usualmente se usan divisores de haz en una configuración triangular [5]. Sin embargo, los interferómetros no son los únicos tipos de montajes que pueden ser llevados a cabo para modelar una transformación unitaria. En el contexto del grupo $SU(2)$ es posible usar los estados de polarización de un haz para modelar un elemento R . Si consideramos el vector de Jones asociado a un haz como:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} E_H e^{i\phi_H} \\ E_V e^{i\phi_V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix}.$$

La acción que genera una lamina de media onda o de cuarto de onda, se pueden modelar como una transformación unitaria U_p actuando sobre el vector de Jones

$$\begin{pmatrix} H_{out} \\ V_{out} \end{pmatrix} = R_p \begin{pmatrix} H_{in} \\ V_{in} \end{pmatrix} \\ \mathbf{J}_{out} = R_p \mathbf{J}_{in}.$$

Los profesores R. Simon y N. Mukunda en 1989 partiendo de estos principios propusieron un montaje universal para controlar los 3 grados de libertad que tiene un elemento de $SU(2)$ [7], usando laminas de media onda y

cuarto de onda en una configuración $H - Q - H - Q$ donde H representa una lamina de media onda y Q una lamina de cuarto de onda. Tomando la parametrización de la ecuación (2) se deben tomar los siguientes angulos en las laminas para poder obtener un Gadget universal $SU(2)$ para estados de polarización

$$R_p = Q_{\xi/2+\pi/4} H_{\xi/2+\eta/4\mp\pi/4} Q_{\xi/2-\pi/4} H_{(\xi-\zeta)/4\pm\pi/4}.$$

A partir de ello se propone un montaje en el que, usando la configuración propuesta, se pretende medir la intensidad después de que un polarizador proyecte el estado de polarización vertical u horizontal.

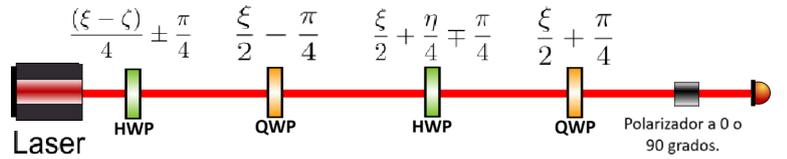


Figura 2: Montaje propuesto para el Gadget universal $SU(2)$ de polarización

II. METODOLOGÍA

A. Parámetro γ

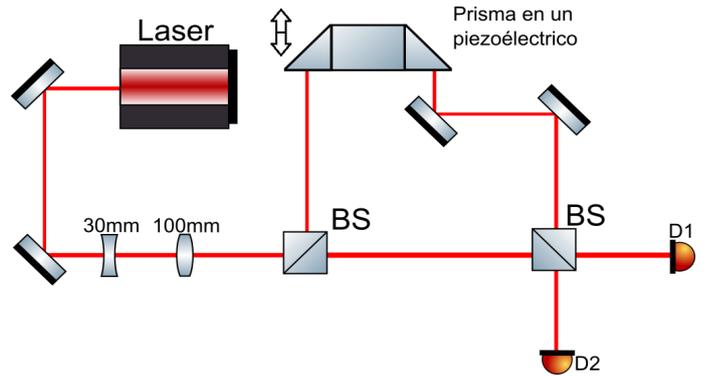


Figura 3: Montaje realizado para ver efectos del parámetro γ

Para medir dependencia con respecto al parámetro γ se propuso un interferómetro en el que se pudiera cambiar la distancia de uno de los caminos ópticos con la finalidad de modificar la fase entre los haces incidentes sobre el segundo Beam Splitter, donde la relación entre la diferencia de caminos y la diferencia de fase esta dada

por:

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \quad (8)$$

Donde Δx es la diferencia de camino óptico y λ la longitud de onda.

Esto se logró usando un piezoeléctrico que permitía modificar la ubicación de un prisma (dove). El haz tenía una potencia inicial de $474,4\mu W$ justo después de los dos lentes en la figura 3. Asimismo, se espera que el beam splitter sea 50/50 según el fabricante, lo cual corresponde a $r = t = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La transformación inducida por el montaje de la figura 3 es

$$R_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix}.$$

De tal manera que si se aplica R_γ en la ecuación (6) y posteriormente en la ecuación (4) se obtiene

$$I_{out1} = \frac{I}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \gamma\right) \quad I_{out2} = \frac{I}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \gamma\right). \quad (9)$$

B. Parámetro β

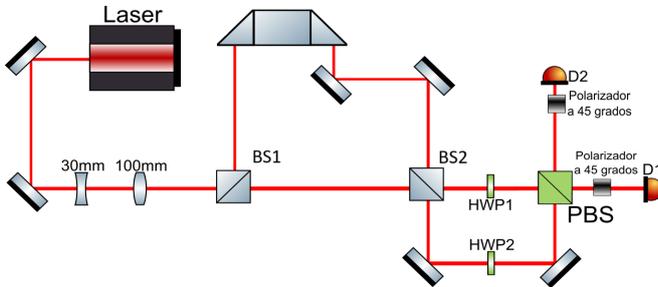


Figura 4: Montaje realizado para ver efectos del parámetro β

Para el segundo montaje se aprovechó el trabajo realizado en el paso anterior, de tal manera que se añadió un PBS que, a diferencia de un Beam Splitter, es sensible a los cambios en la polarización de la luz. Como se puede ver en la figura 4, se usaron dos láminas de media onda con la finalidad de modificar la transmitancia. Si consideramos que β_1 es el ángulo de la lamina de media onda 1, y β_2 el ángulo de media onda 2, se tendrá que la matriz de transformación asociada al montaje sera:

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin \beta_1 + \cos \beta_2 & \sin \beta_1 - \cos \beta_2 \\ \cos \beta_1 + \sin \beta_2 & \cos \beta_1 - \sin \beta_2 \end{pmatrix}$$

De tal manera, no es claro que la matriz induzca una transformación unitaria. De hecho, en principio, no necesariamente debería serlo, considerando que esta depende de los estados de polarización de los haces incidentes.

Se propone suponer una transformación unitaria replicando lo realizado en el inciso anterior con la finalidad de observar las diferencias experimentales entre el montaje y una transformación unitaria. De tal manera se supone una matriz asociada al montaje como:

$$R_\beta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix}$$

Finalmente, las intensidades asociadas a los estados de salida sera

$$I_{out1} = \frac{I}{2} (1 - \sin \beta \cos \gamma) \quad I_{out2} = \frac{I}{2} (1 + \sin \beta \cos \gamma). \quad (10)$$

C. Parámetro α y transformación $SU(2)$

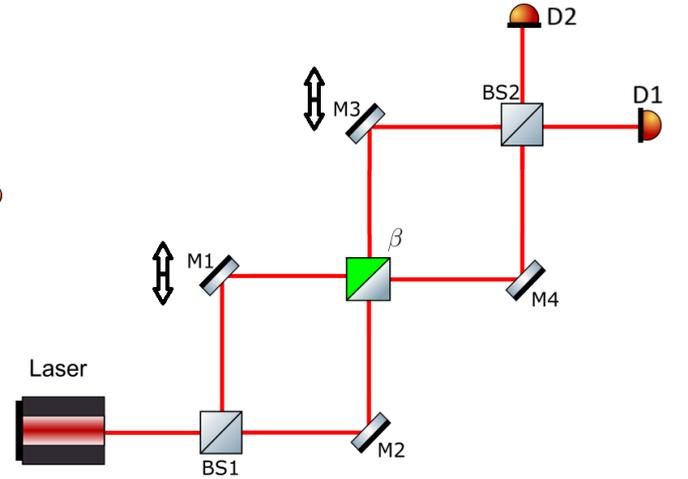


Figura 5: Montaje propuesto para ver efectos del parámetro α

En el montaje propuesto en la figura 5 se pretende aprovechar las técnicas aprendidas en . Modificando la longitud de los caminos ópticos mediante los espejos M1 y M3, se pueden controlar los parámetros α y γ . Para el parámetro β puede ser posible usar un BS cuya reluctancia dependa del ángulo de incidencia, etc. Este

montaje induciría una transformación

$$R_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix}.$$

De tal manera que las intensidades en los estados finales seguirán las relaciones

$$I_{out1} = \frac{I}{2}(1 - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma)$$

$$I_{out2} = \frac{I}{2}(1 + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma)$$

Obteniendo una relación que puede ser fácilmente verificable por medio de tomas de datos de intensidad o potencia.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A. Parámetro γ

Se tomaron datos de la potencia en función a la variación del piezoeléctrico, en donde se obtuvo el siguiente comportamiento:

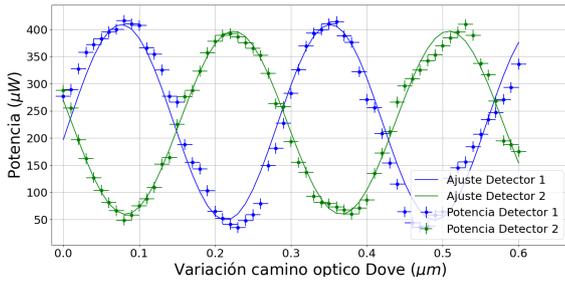


Figura 6: Datos obtenidos del primer montaje.

De la figura 6 se realizó un ajuste según la ecuación (9). Se obtuvo una potencia inicial de $(457 \pm 5)\mu W$, obteniendo un resultado preciso y, además, exacto. Esto se debe a que se obtuvo una diferencia de $3,48\sigma$, donde σ corresponde al valor de la incertidumbre. También se obtuvo una reflectancia de $(0,5 \pm 0,3)$, lo cual, pese a ser un resultado bastante impreciso, no dista del valor esperado al principio del experimento.

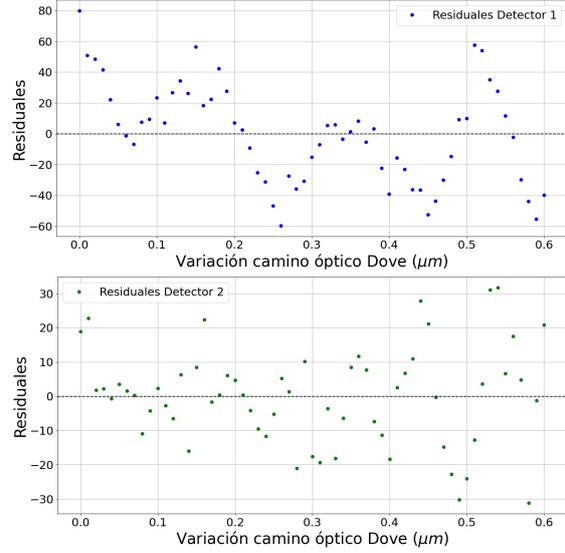


Figura 7: Residuales obtenidos del primer montaje.

De la figura 7, se puede observar un aparente comportamiento aleatorio en los residuales. Dando un buen indicio de que el ajuste realizado para el conjunto de datos es válido.

B. Parámetro β

En el segundo montaje primero se tomaron datos de potencia en función de los ángulos de las láminas de media onda bloqueando uno de los caminos ópticos.

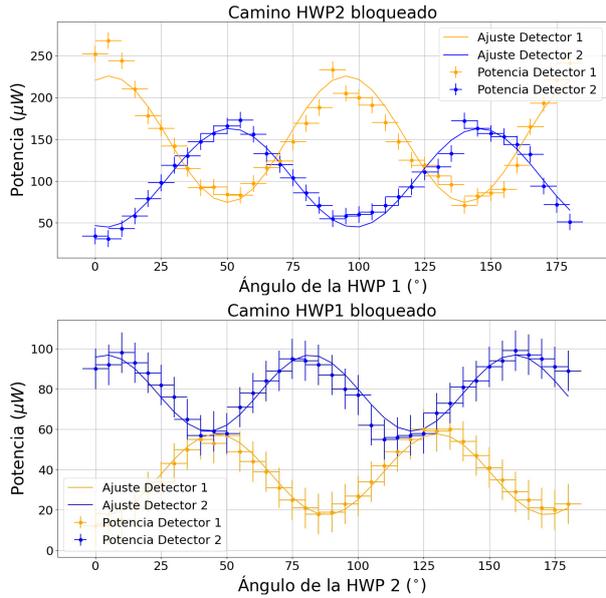


Figura 8: Datos de potencia en función de los ángulos de las láminas de media onda.

De la figura 8 se puede observar que, en el ángulo de $32,5$ de la HWP1, se tiene una reflectancia y transmitancia de $50/50$.

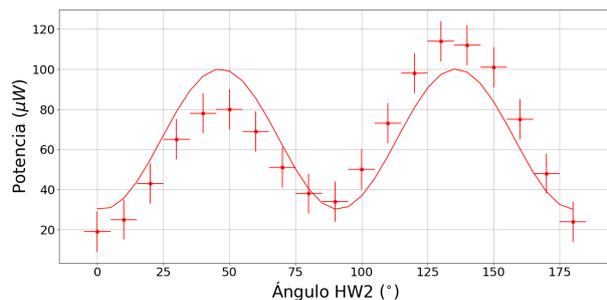


Figura 9: Datos obtenidos del segundo montaje, variando el ángulo de la HWP2 y dejando HWP1 a 32°

Luego de implementar completamente el segundo montaje, se tomaron datos de la potencia de la interferencia respecto a la variación del ángulo de la HWP2, dejando la HWP1 fija en el punto de aparente $50/50$, es decir, a 32 grados. Esto se hizo con el fin de observar el patrón de interferencia en el detector 2 variando la transmitancia como se puede observar en la figura 9. Se obtuvo una potencia inicial de $(260 \pm 20)\mu W$ tomando un ajuste a la ecuación (10) difiriendo en $10,72\sigma$ de la potencia esperada.

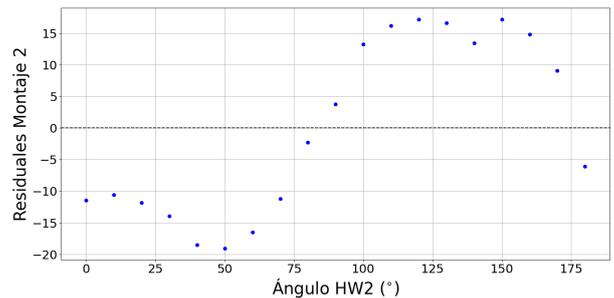


Figura 10: Residuales obtenidos del segundo montaje

Además, como se puede ver de la figura 10, los residuales carecen de comportamiento aleatorio, mostrando un fuerte comportamiento sinusoidal indicando que el ajuste propuesto no es exactamente válido para este conjunto de datos.

IV. CONCLUSIONES

En conclusión, se observó el comportamiento unitario de la transformación inducida por el montaje con respecto a γ . Para el segundo montaje, se observó una amplia diferencia entre los resultados esperados y lo obtenido experimentalmente. Además, debido al comportamiento de los residuales, se puede evidenciar que la transformación inducida por el montaje 2 no corresponde a una transformación unitaria. Como posible trabajo a futuro, se propone la implementación experimental del montaje de la figura 5 con la finalidad de caracterizar completamente el grupo $SU(2)$ en un montaje óptico, donde se pueden probar alternativas al PBS para controlar el parámetro β . Asimismo, puede ser de interés implementar el dispositivo propuesto en la figura 2, en la cual se presenta una alternativa al fenómeno de interferencia para poder comprender y estudiar el grupo $SU(2)$ en el contexto de estados de polarización.

-
- [1] S. Aaronson and A. Arkhipov. The computational complexity of linear optics. *Theory of Computing*, **9**:143–252, 2013.
 - [2] M. Beck. *Quantum Mechanics: Theory and Experiment*. Oxford University Press, 2012.
 - [3] H. de Guise, O. Di Matteo, and L. L. Sánchez-Soto. Simple factorization of unitary transformations. *Phys. Rev. A*, **97**(2):022328, 2018.
 - [4] C. C. Gerry and P. L. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005.
 - [5] M. Reck, A. Zeilinger, H. J. Bernstein, and P. Bertani. Experimental realization of any discrete unitary operator. *Phys. Rev. Lett.*, **73**:58–61, Jul 1994.
 - [6] J. Schwichtenberg. *Physics from Symmetry*. Springer, 2018.
 - [7] R. Simon and N. Mukunda. Universal $su(2)$ gadget for polarization optics. *Physics Letters A*, **138**(9):474–480, 1989.
 - [8] B. Yurke, S. McCall, and J. Klauder. $Su(2)$ and $su(1,1)$ interferometers. *Physical review. A*, **33**:4033–4054, 07 1986.

APÉNDICE DE CÁLCULO DE ERRORES

De la ecuación (9), se propone un ajuste del tipo $A + B \sin CX$ con X la variación del camino óptico, de donde se puede deducir que la potencia inicial sera $P_i = 2A$, así como la reflectancia $r = \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{B}{A}\right)}{2}\right)$:

$$\sigma_{P_i} = \left| \frac{\partial P_i}{\partial A} \sigma_A \right|$$

$$\sigma_r = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial B} \sigma_B \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial A} \sigma_A \right)^2}$$