

Caracterización de la Óptica de Fourier con lentes convergentes

Juan Estupiñán and Valentina Quiroga
 Departamento de física, Universidad de los Andes
 (Dated: 9/05/2014)

La transformada de Fourier es una operación matemática que caracteriza una función en términos de un análisis de sus frecuencias. A partir de un arreglo de lentes y el uso de láser, este experimento busca demostrar que un lente convergente puede generar una operación equivalente a la transformada de Fourier espacial sobre un pulso rectangular.

I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Fourier proporciona una descripción de la propagación de una onda en términos del análisis armónico, es decir, la expansión de una función arbitraria dependiente del tiempo como una superposición de funciones armónicas de frecuencias distintas entre sí. Ésto se hace con el fin de conocer, para cualquier input arbitrario, la respuesta (o output) del sistema a partir de la suma de las respuestas individuales de cada función armónica.

La representación dada por la transformada de una función $f(x, y)$ (dependientes de la posición) está dada por:

$$F(f(x, y)) = F\left(\frac{q_x}{2\pi}, \frac{q_y}{2\pi}\right) \exp(-i2\pi\left(\frac{qx}{2\pi} + \frac{qy}{2\pi}\right))$$

Con q_x y q_y como las frecuencias espaciales del sistema; x y y como las posiciones. Ahora, por simplicidad requerimos realizar una analogía con las ondas planas, con el fin de lograr tratar el sistema de forma lineal. Es interesante ver que:

$$U(x, y, z) = A \exp(-i(xK_x + yK_y + zK_z))$$

Con A como una constante compleja y k como el vector de onda. Para nuestro caso $z=0$ y $k_x = 2\pi\nu_x = \frac{q_x}{2\pi} 2\pi = q_x$, mismo caso para y . Reescribiendo:

$$U(x, y, 0) = A \exp(-i(xq_x + yq_y)) = f(x, y)$$

Dicho esto, si se toma un sistema con 2 planos ortogonales al plano óptico z , se pueden tomar un sus amplitudes correspondientes como el input y el output del sistema, donde $U(x, y, 0) = f(x, y)$ es la función input y $U(x, y, z)$ como el output. Todo parte de la consideración de que la $f(x, y)$ es una representación de un patrón espacial de las coordenadas x, y . El análisis espacial consiste en tomar una onda electromagnética viajando en z , modulada por la función armónica dada por $U(x, y, 0) = f(x, y)$ y convertirla en una onda plana con vectores de onda a ángulos equivalentes $\theta_x = \nu_x = \frac{q_x}{2\pi} \lambda$ y $\theta_y = \nu_y = \frac{q_y}{2\pi} \lambda$.

Se utilizó una rejilla de difracción que actúa como un prisma, formando un ángulo respecto a la interfase y desviando su trayectoria tal como se ve en la figura 2. Si



FIG. 1. Transformada de Fourier de un pulso cuadrado

la transmisión de la función es la suma de varias funciones armónicas de distintas frecuencias espaciales, la onda transmitida es la suma de una número igual de ondas planas dispersadas en direcciones distintas, cuya amplitud depende del componente armónico correspondiente. De tal manera que:

$$f(x, y) = F \frac{1}{4\pi^2} \iint (F\left(\frac{q_x}{2\pi}, \frac{q_y}{2\pi}\right) e^{-i2\pi\left(\frac{qx}{2\pi} + \frac{qy}{2\pi}\right)} dq_x dq_y$$

luego,

$$U(x, y, z) = F \frac{1}{4\pi^2} \iint (F\left(\frac{q_x}{2\pi}, \frac{q_y}{2\pi}\right) e^{-i2\pi\left(\frac{qx}{2\pi} + \frac{qy}{2\pi}\right)} e^{-ik_z z} dq_x dq_y$$

Con $(F\left(\frac{q_x}{2\pi}, \frac{q_y}{2\pi}\right))$ como la envolvente compleja y la transformada de Fourier de $f(x, y)$. Dado que $(\frac{q_x}{2\pi})^2 + (\frac{q_y}{2\pi})^2 < \frac{1}{\lambda^2}$ se establece como condición, se puede aplicar dicho análisis del espectro espacial.

En el experimento se realizó la transformada de Fourier de un láser de Helio-Neón que al ser difractado por una rejilla lineal, es representado por una función discontinua aproximada a una función rectangular como la de 1, se vuelve una transformada de Fourier corresponde a una función $sinc(x)$. La obtención de la transformada se evaluó con métodos principalmente gráficos dado que la cámara CCD permite graficar el perfil de intensidades dato a dato. Finalmente se usó un lente convergente con el fin de centrar y colimar, a la distancia focal, los rayos difractados tal como se ve en la figura 3.

II. MONTAJE EXPERIMENTAL

Se procedió a armar el montaje ilustrado en la figura 4. En esta se indica la posición del laser (He-Ne), los espejos (M), el *beam expander* (BE), los lentes (L), los objetos (O) y los detectores (CCD). La zona demarcada corresponde al experimento en sí, en el cual se miró la

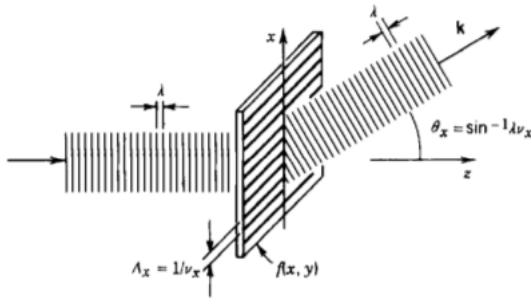


FIG. 2. Difracción del haz por un objeto

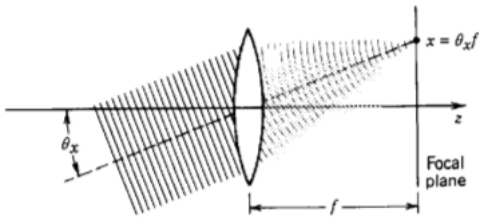


FIG. 3. Enfoque de ondas planas por un lente convergente

transformada de fourier usando lentes, mientras que la otra zona es un arreglo de *imaging system* para ver el haz del laser sin transformarlo.

Para la configuración con lentes, se determinó las posiciones de los elementos. La distancia objeto-lente y la distancia lente-detector eran ambas de la longitud focal

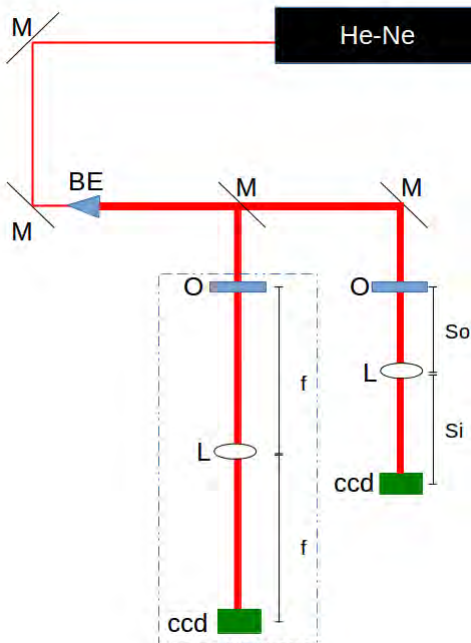
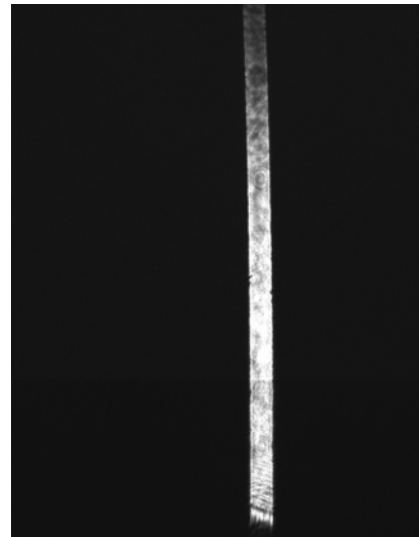


FIG. 4. Diagrama esquemático del montaje

FIG. 5. Imagen registrada con el *imaging system*

f del lente usado, en este caso $f = 100$ mm. Ahora para el *imaging system* funcione, se necesita cumplir la relación $s_o^{-1} + s_i^{-1} = f^{-1}$, de esta forma se decidió que $s_o = 200$ mm, y por lo tanto $s_i = 200$ mm usando un lente con $f = 100$ mm.

Se procedió a medir con la cámara ccd de manera que registrara los valores de la intensidad de luz recibida de cada pixel. Para el caso del *imaging system* se debió realizar un barrido de toda la imagen ya que esta no podía ser registrada en una única toma. Para la transformada sí se podía obtener una serie de datos por medición. A partir de los datos obtenidos en un archivo en formato *FITS*, se realizó una serie de gráficas para comprobar si realmente lo que se obtuvo la transformada de fourier para el objeto utilizado.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Para las mediciones se utilizó como objeto un diafragma lineal con apertura de 2 mm. Teóricamente esta configuración produce un pulso (Fig. 5), el cual posee una función $sinc = \sin(x)/x$ como transformada de fourier. En una primera aproximación, la imagen resultante en el plano de fourier (Fig. 6) tenía la forma de dicha función *sinc*.

Luego, usando los datos en el archivo *FITS* obtenido, se procedió a medir la intensidad de los diferentes picos, para tener una medida más cuantitativa y poder comprobar si realmente se trata de la transformada de fourier requerida. Se logró un mapa de colores que permiten ver la intensidad (Fig. 7) y una gráfica de perfil de intensidades (Fig. 8).

Seguidamente se procedió a realizar un ajuste de una función *sinc* para ver su correlación con el perfil de intensidades obtenido (Fig. 9). Para esto se usó el método numérico de correlación de mínimos cuadrados, el cual

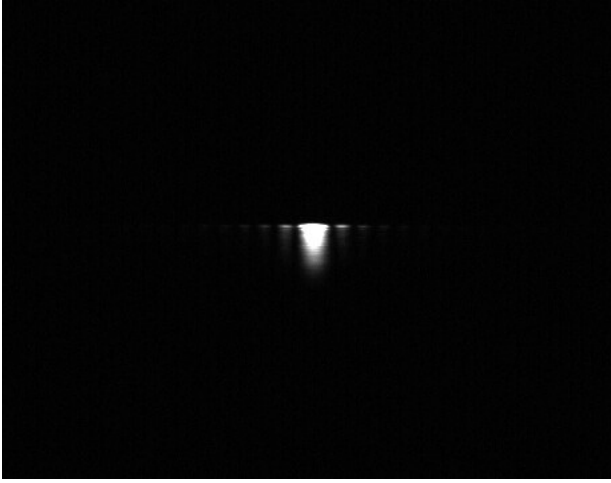


FIG. 6. Imagen registrada con la cámara ccd

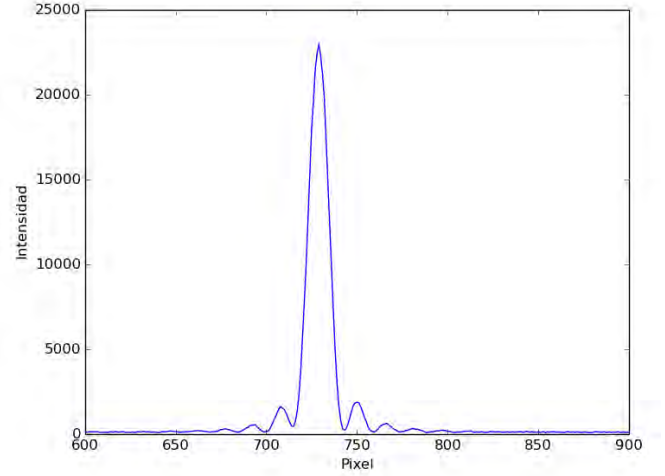


FIG. 8. Perfil de intensidades

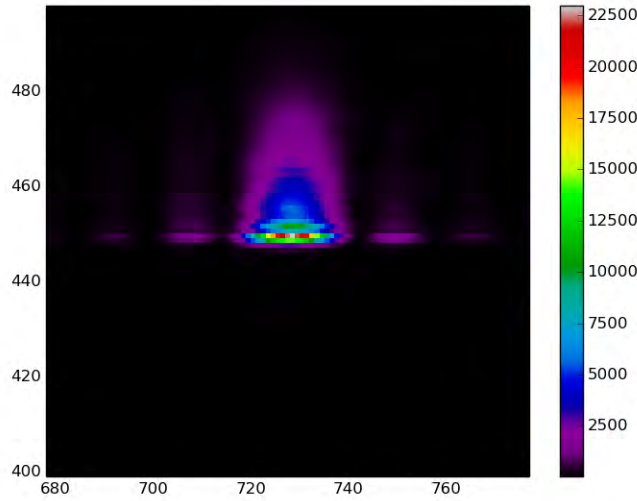


FIG. 7. Mapa de colores para las intensidades registradas con la cámara ccd

consiste en medir las distancias entre el valor teórico y el valor obtenido, de la forma

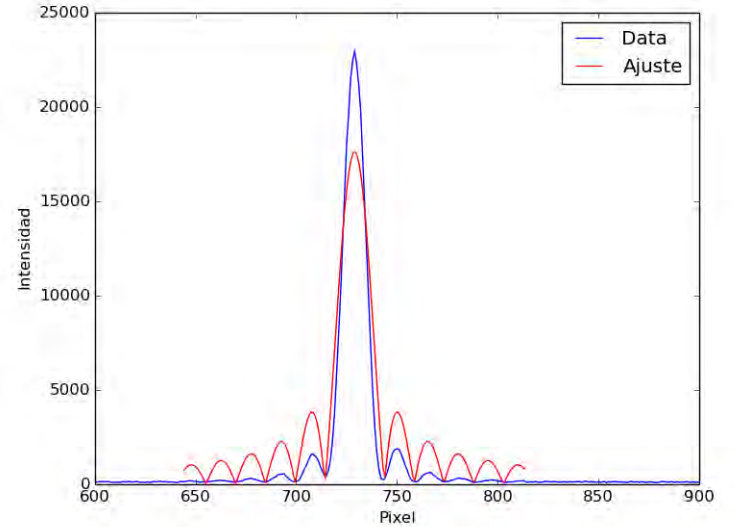
$$\chi^2 = \frac{(I_{teo} - I_{obt})^2}{N}$$

Donde N es el número de puntos evaluados. De esta manera se obtuvo que la función que mejor se ajustaba a los datos fue

$$f(x) = \text{sinc}\left(\frac{x}{4.7}\right) \times 17600 = \frac{\sin(x/4.7)}{x/4.7} \times 17600 \quad (1)$$

$$\chi^2 = 2902740.94008 \quad (2)$$

El índice de correlación, y por tanto de verosimilitud, resultó ser bajo numéricamente, aunque en análisis gráfico resulta estar dentro del error esperado puesto que la figura obtenida cumple el fit para una función $\text{sinc}(x)$.

FIG. 9. Ajuste de la función sinc

IV. CONCLUSIONES

El experimento resultó ser exitoso dentro de las condiciones dadas. Si bien se tuvo una baja verosimilitud numérica, es importante destacar que la distorsión sólo es referente a la amplitud de la función de intensidades, cuyo valor depende en gran medida de la amplitud de la función a transformar, si no que depende a su vez del valor de la energía suministrada por la fuente que en este caso es el láser de Helio-Neón. El corrimiento visto puede deberse a que se requieren energías mucho más altas que las que se podían suministrar en el laboratorio para alcanzar una mayor verosimilitud con la función $\text{sinc}(x)$. Además de ello, se deben consid-

erar los errores sistemáticos asociados a los lentes suministrados los cuales poseían ligeros rayones y contaminaciones, al primer espejo del montaje que generaba un ligero patrón de difracción no deseado y a la incertidumbre asociada a los instrumentos de medición (cámara CCD). En adición, también es importante considerar los errores aleatorios asociados al experimento y a errores humanos. Las proyecciones a futuro en este experimento incluyen probar la eficacia del mismo en distintos tipos de obstáculos así como probar la similitud entre el efecto

de la transformada de Fourier en el *far field* con los resultados hallados usando lentes.

V. AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a David Guzmán y a Alejandra Valencia por su asesoramiento y colaboración durante todo el proyecto.

¹ Bahaa Saleh, *Fundamentals of Photonics*. John Wiley & sons, Inc. 1991

² TESS Expert, *Fourier optics -4f Arrangement- Filtering and reconstruction* PHYWE Systeme GmbH & Co.