

# Medición de la Transformada Fraccionaria de Fourier de Dos Haces de Luz Paralelos en un Sistema Óptico

Jose Alejandro Gutierrez Cifuentes\*  
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.  
(Dated: 10 de diciembre de 2024)

Se usaron un par de haces gaussianos separados una distancia  $d = 1,433mm$  para aplicarles transformadas fraccionarias de Fourier (TFF)  $F^a$  en un montaje óptico. Se utilizó un láser con longitud de onda  $\lambda = 780nm$ . Su haz fue dividido en 2 con ayuda de un PBS. Usando lentes se pudieron aplicar las TFF al par de haces. Se midió la intensidad para cada transformada ubicando una cámara CCD en el valor de  $z$  dependiente del parámetro  $a$  de la transformada y con el programa *imagej* se obtuvieron los perfiles espaciales correspondientes a cada transformación. Al comparar con la teoría, las transformaciones cercanas a la transformada convencional de Fourier no encajaban. Se necesita revisar la sensibilidad del montaje para estas mediciones y revisar la distancia  $d$  con relación al *waist* del haz.

## I. INTRODUCCIÓN

El estudio de los estados cuánticos de fuentes de luz es fundamental para el desarrollo en diversas áreas; desde la computación cuántica, tomografía, aplicaciones industriales, entre muchas otras. Por este motivo, es importante buscar la forma más efectiva de estudiar este fenómeno sin importar el tipo de estado cuántico de la luz.

Para poder realizar este estudio de forma óptima es necesario recurrir a la función de Wigner. Esta función, introducida en 1932 por Eugene Paul Wigner [3], es una función de cuasiprobabilidades asociada a la función de onda del sistema dada por la ecuación de Schrödinger en el espacio de fase, pues depende de las variables posición y momentos generalizados, en el caso de la luz, las asociadas al campo eléctrico. Esta función permite identificar de forma sencilla las cuadraturas (o ejes en el espacio de fase) óptimas para preparar un sistema físico con el fin de ser estudiado minimizando la incertidumbre [1]. Algo importante para tener en cuenta es que esta función no representa información del sistema físico por sí sola sino que se debe obtener la distribución marginal en alguna cuadratura para estudiar la distribución de probabilidad del sistema. Esta distribución se obtiene mediante la transformada de Radon.

Según Piñeros [2], se puede plantear una relación entre la función de Wigner proyectada con la transformada de Radon y la Transformada Fraccionaria de Fourier (TFF). Esta última es una generalización de la transformada de Fourier que nos permite acceder a cuadraturas intermedias en el espacio de fase, no solo

posición y momento generalizados, sino superposiciones de estas. Con esto en mente, si se pueden obtener varias TFF de un sistema óptico, es posible generar una reconstrucción de la función de Wigner.

Esta fue la motivación del presente proyecto, en el cuál utilizamos un par de haces gaussianos paralelos separados por una distancia  $d = 1,433mm$  producidos con un láser de 780nm. Con este montaje, se desean tomar varias TFF.

## II. MARCO TEÓRICO

Consecuentemente, es necesario representar el estado cuántico del par de haces gaussianos en el espacio de fase. Por lo tanto, se usa la función de Wigner definida como:

$$W(y, q_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left( y - \frac{y'}{2} \right) e^{-iq_y y'} \psi \left( y + \frac{y'}{2} \right) dy'. \quad (1)$$

Por el otro lado, para analizar en distintas cuadraturas la intensidad de los haces recurrimos a una generalización de la Transformada Fraccionaria de Fourier (TrFF). Esta se define como

$$F^a \{ \psi(y) \} := \underbrace{(F \circ F \circ \dots \circ F)}_a \{ \psi(y) \}, \quad (2)$$

tal que  $a \in (\mathbb{R})$  y es un parámetro que indica cuántas veces se tiene que aplicar la TFF para completar una Transformada de Fourier convencional. De tal manera que  $F^{a=1}$  es la transformada de Fourier convencional y para  $a = 0$  se mantiene invariante la función. Con esto en mente, se plantea la relación:

$$\theta = \frac{a\pi}{2}, \quad (3)$$

con  $\theta$  siendo el ángulo medido en el espacio de fase desde el eje  $y$  (asociado a la posición) hasta la cuadratura a la

---

\* Correo institucional: ja.gutierrezc1@uniandes.edu.co

que se transformó la expresión con la TFrF. Haciendo uso de la ecuación 3 se puede restringir el parámetro  $a$  puesto que  $\theta \in [0, \pi)$ . Con lo que  $a \in [0, 2)$ . Además, uno puede realizar estas transformaciones de manera experimental para una fuente de luz mediante lentes. Se escoge un lente  $f_1$  para realizar la transformada  $F^1$  y con base en esta se siguen las siguientes ecuaciones para elegir lentes  $f$  y distancias  $z$  a las cuales se realiza la transformada  $F^a$

$$f = \frac{f_1}{\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)}, \quad (4)$$

$$z = \tan\left(\frac{a\pi}{4}\right) f_1 \quad (5)$$

Finalmente, se utilizará la Transformada de Radón, la cual permite proyectar cualquier función aplicada al espacio de fase en la cuadratura que deseemos dependiendo del ángulo  $\theta$ , medido como para la ecuación 3. La transformada de Radón está definida por

$$R_\theta[f(y, q_y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y, q_y) \delta(y \cos \theta + q_y \sin \theta - s) dq_y dy. \quad (6)$$

Los parámetros de la ecuación 6 se aprecian mejor en la figura 1. En nuestro caso, esta transformada se aplicará sobre el espacio de fase, con  $x$  siendo la coordenada generalizada.

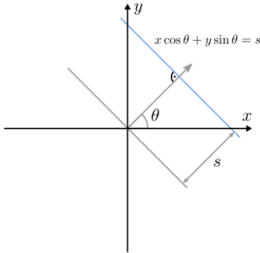


Figura 1. Transformada de Radón aplicada a un plano arbitrario  $x, y$  tomada de [2]

Para el caso del montaje óptico resultamos con la relación

$$R_\theta[W_E(y, q_y)] = \tilde{E}_a(y)^2,$$

$$W_E(y, q_y) = R_\theta^{-1}[\tilde{E}_a(y)^2]. \quad (7)$$

Donde vemos que al obtener TFrF al campo eléctrico de una fuente de luz y midiendo su intensidad, se puede

reconstruir su función de Wigner. Para este caso realizaremos este proceso para dos haces gaussianos que tienen la distribución

$$\psi(y) = N \left( e^{-\alpha(y-d)^2} - e^{-\alpha(y+d)^2} \right), \quad (8)$$

para  $d = 1,433mm$ ; la distancia entre los haces,  $\alpha = 3,0707 \frac{1}{mm^2} = \frac{1}{2\sigma^2}$ ; con  $\sigma^2$  como la desviación estándar de las gaussianas, y  $N = 1$ .

### III. MONTAJE EXPERIMENTAL Y METODOLOGÍA

En la figura 2 se aprecia el montaje óptico que se utilizó para el análisis.

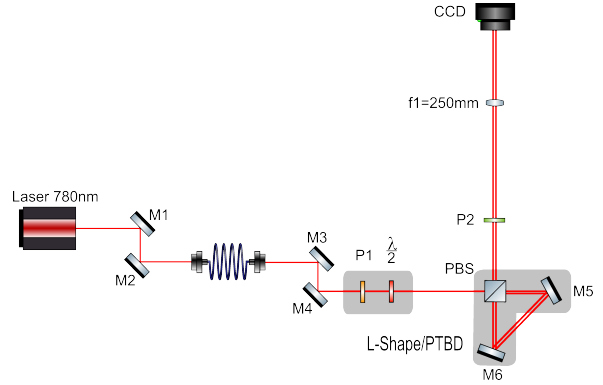


Figura 2. Montaje experimental. Los elementos marcados con la M son espejos; usados únicamente para redireccionar, con P son polarizadores y con f son lentes. El PBS es un *polarizing beamsplitter*. Para los elementos particulares, de izquierda a derecha, un láser de 780nm y una fibra óptica *singlemode*, una lámina de media onda ( $\frac{\lambda}{2}$ ) y una cámara CCD.

Se utilizó una fibra óptica *singlemode* para acoplar el haz del láser de 780nm. Posteriormente, se utilizó un polarizador y una lámina de media onda para definir desfase y polarización del haz. Al pasar el haz por el PBS, ubicado en una PTBD, se separa en polarización vertical y horizontal. Los haces salientes del PBS son redirigidos con espejos (M5 y M6) para estar alineados y que pasen por un segundo polarizador en el cual quedan con la misma polarización (diagonal). Después de este polarizador (P2), se elige una distancia  $z = 0$  a la cual se hace la medición para la transformada  $F^0$ . Para realizar la transformada para un parámetro  $a$  se usan lentes y distancias para ubicar la CCD siguiendo las ecuaciones 4 y 5

Las imágenes obtenidas con la CCD se pasan por el programa *imagej* para obtener la distribución de la intensidad espacialmente.

#### IV. RESULTADOS

Para realizar las transformadas, dependemos de los lentes que se tengan en el laboratorio, por lo tanto, siguiendo la ecuación 4 para los lentes que se tengan en el laboratorio podemos elegir el parámetro  $a$  y calcular con 5 la distancia a la cual se debe ubicar la CCD. Adicionalmente, al concatenar dos lentes, se suman los ángulos de la TFrF. Así se pudieron tomar muchas más TFrF con los lentes que se encontraban en el laboratorio. Las transformadas realizadas se encuentran en el cuadro I.

<b>f (mm)</b>	<b><math>\theta</math> (rad)</b>	<b>z (cm) <math>\pm 0.01</math></b>
0	0.000	0.00
250	$\pi/2$	25.00
300	0.985	13.42
400	0.675	8.78
500	0.524	6.70
750	0.340	4.29
1000	0.253	3.18
250,300	2.556	82.92
250,400	2.246	52.04
250,500	2.094	43.30
250,750	1.911	35.36
250,1000	1.823	32.27

Cuadro I. Parámetros para las TFrF medidas en de los dos haces gaussianos siguiendo las ecuaciones 4 y 5 junto con valores calculados por Piñeros [2]

En las figuras 3, 4 y 5 se aprecian las transformadas correspondientes a  $f = 0$ ,  $f = 400$  y  $f = 500$ , respectivamente, comparadas con la teoría. Estos son ángulos para los cuales la distribución marginal de la función de Wigner aún no registra interferencia entre los haces. Sin embargo, cuando revisamos la transformada  $F^1$  con  $f = f_1$  (figura 6) donde hay alta interferencia entre los haces, no hay concordancia entre la teoría y lo medido con la CCD.

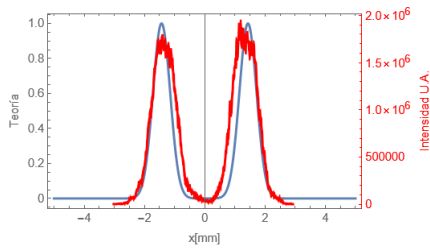


Figura 3. TFrF experimental para  $f = 0$  ( $\theta = 0,675rad$ ) comparada con su función teórica.

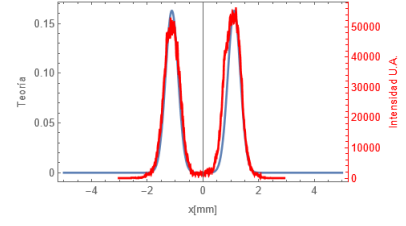


Figura 4. TFrF experimental para  $f = 400$  ( $\theta = 0,675rad$ ) comparada con su función teórica.

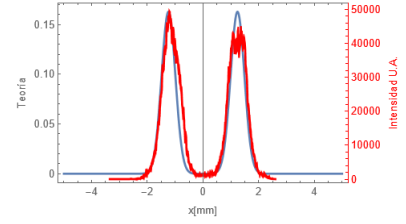


Figura 5. TFrF experimental para  $f = 500$  ( $\theta = 0,524rad$ ) comparada con su función teórica.

No obstante, si comparamos el espectro tomado para  $F^1$  6 y lo comparamos con ángulos menores, donde hasta ahora hay poca interferencia, pareciera que hay una mayor concordancia. Pero sigue sin ser una predicción buena. Esto se aprecia en las figuras 7 y 8.

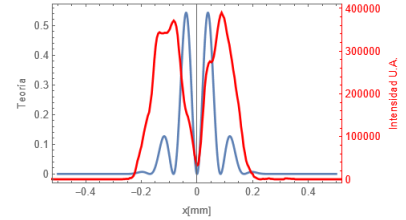


Figura 6. TFrF experimental para  $f = 250$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}rad$ ) comparada con su función teórica.

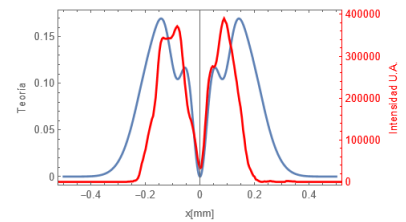


Figura 7. TFrF experimental para  $f = 250$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}rad$ ) comparada con la función teórica para  $\theta = (\frac{\pi}{2} - 0,1)rad$ .

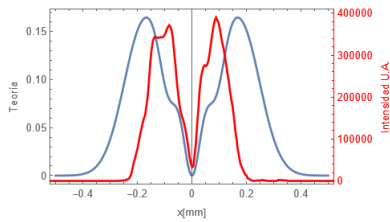


Figura 8. TFrF experimental para  $f = 250$  ( $\theta = \frac{\pi}{2} rad$ ) comparada con la función teórica para  $\theta = (\frac{\pi}{2} - 0,12) rad$ .

## V. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Cuando se comparan las gráficas que deberían mostrar las distribuciones marginales con interferencia entre los haces con la teoría no son compatibles. Especialmente, para la transformada  $F^1$  donde debería apreciarse en mayor medida la interferencia, pareciera

que apenas empieza a ocurrir este fenómeno como se aprecia en 7 y 8. Así que estas transformadas no reflejan lo que se espera ver.

De lo anterior se puede concluir y se sugieren dos cosas. La primera es que a la hora de realizar las mediciones para estos ángulos hubo un error ubicando la CCD a la distancia  $z$  correspondiente, lo cual impidió que se midiera correctamente la TFrF esperada. La segunda es que el *waist* de los haces pudo haberse modificado por factores externos a lo largo de la toma de datos y, por ende, la distancia  $d$  de separación entre los haces no es la suficiente para que se presente interferencia.

Es necesario revisar con más cuidado el *waist* del haz y su relación con la distancia  $d$  a lo largo del experimento e intentar controlar factores externos que puedan cambiar el montaje experimental.

- 
- [1] A. Furusawa. *Quantum States of Light*, volume 10 of *SpringerBriefs in Mathematical Physics*. Springer Japan, 2015.
- [2] P. E. Piñeros Lourenco. Emulating the wigner function of an odd cat state by means of classical light fields, 2023. Acceso abierto bajo licencia Attribution-NoDerivatives

- 4.0 Internacional.
- [3] J. Weinbub and D. K. Ferry. Recent advances in wigner function approaches. *Applied Physics Reviews*, 5(4):041104, 2018.