

Medición de la Transformada Fraccional de Fourier

Pablo Salazar Granados*

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 27 de mayo de 2025)

Se realizó la medición de las transformadas de Fourier fraccionales de dos haces gaussianos separados una distancia $d = 1,31$ mm. Para esto, se implementó un montaje óptico que divide un láser con longitud de onda $\lambda = 780$ nm en dos haces que luego pasan por sistema 2F que permite obtener la FFT. Las mediciones se realizaron con una cámara CCD y fueron luego procesadas con ayuda de python y mathematica. Se obtuvo una excelente concordancia entre los resultados experimentales y las predicciones teóricas para las transformaciones con $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. Estos resultados demuestran la capacidad del montaje óptico para medir la transformada de Fourier.

I. MARCO TEÓRICO

La Transformada Fraccional de Fourier (o FFT por sus siglas en inglés) es una generalización de la Transformada de Fourier que consiste en concatenar esta a veces, transformando, por ejemplo, de posición a momento en a pasos. Esta herramienta matemática ha encontrado aplicaciones importantes en óptica, procesamiento de señales y sistemas de imágenes, donde proporciona un marco unificado para describir la propagación de la luz a través de sistemas ópticos. Se define de la siguiente manera [1]:

$$F^a\{g_0(x)\} := \underbrace{(F \circ F \circ \dots \circ F)}_a\{g_0(x)\} \quad (1)$$

Lo anterior sugiere que al realizar la transformada fraccional se está en un dominio intermedio del espacio de fase, una superposición asociada a una rotación de ángulo θ respecto a x como se observa en la Figura 1.

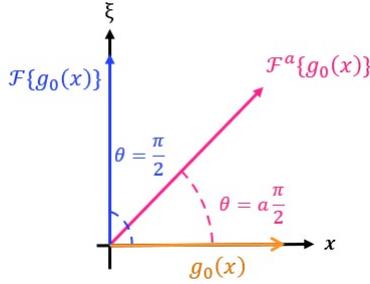


Figura 1. Transformada de Fourier para función $g_0(x)$. La Transformada completa está asociada a una rotación de $\theta = \pi/2$, mientras que la transformada fraccional tiene un ángulo de $\theta = a\pi/2$.

En el campo de la óptica, esta transformación fraccional se puede realizar con el uso de lentes. Experi-

mentalmente existe una relación entre la rotación, el parámetro a , la lente a usar y la distancia a la cual se debe posicionar esta lente. Esta se observa en la Figura 2.

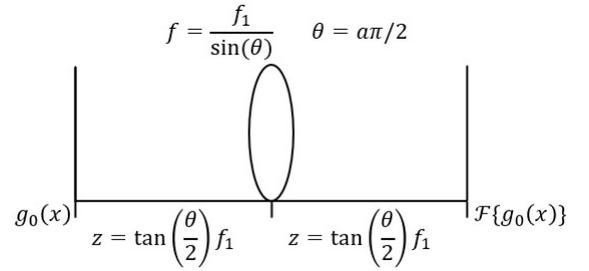


Figura 2. Montaje teórico 2F. Se muestra la relación entre la distancia focal de la lente f , la distancia z y el ángulo a medir θ .

Entonces θ es el ángulo como lo visto en la Figura 1, f es la distancia focal de la lente, z la distancia a la cual se debe poner la lente y la cámara para observar la transformada, y f_1 es un parámetro libre que se refiere a la lente con la cual se obtiene la transformada de Fourier completa [2].

II. MONTAJE EXPERIMENTAL

Hay una limitación para medir más ángulos, las distancias focales pueden no existir para el ángulo a medir. Por lo tanto la idea para medir mayor cantidad de ángulos fue usar la propiedad (2):

$$F^{a_2}\{F^{a_1}\{g_0(x)\}\} = F^{a_1+a_2}\{g_0(x)\} \quad (2)$$

donde F^{a_2} es la FFT asociada a una lente con distancia focal f' y F^{a_1} la FFT asociada a una lente con distancia focal f . Este montaje es similar a lo observado anteriormente en la Figura 2.

La distribución espacial a transformar fue un par de haces gaussianos, producto de un solo haz proveniente de un láser de 780 nm. La potencia del láser medida

* Correo institucional: p.salazarg@uniandes.edu.co

fue de $(0,145 \pm 0,001)mW$ en z_0 . Se puede observar el montaje del experimento en la Figura 3.

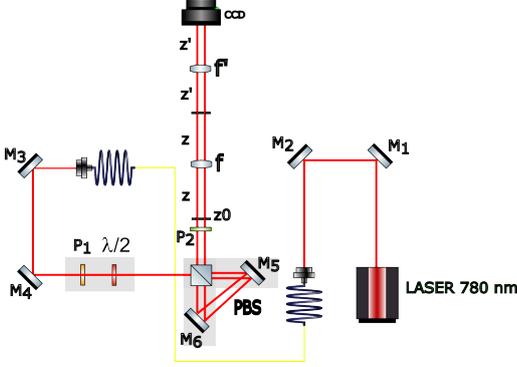


Figura 3. Montaje experimental. M: Espejo, P: Polarizador, $\lambda/2$: Lámina de media onda, PBS: *Polarizing Beam Splitter*, f: Lente, CCD: Cámara. Se cuenta con un láser de 780 nm como fuente de luz. Espejos M1 y M2 alinean el haz a una fibra óptica *single mode* para colimarlo. Los espejos M3 y M4 lo alinean a un PBS en el cual se divide 2 haces con perfil gaussiano, los cuales son transformados por los lentes.

Para realizar la transformada de Fourier completa se usó un lente biconvexo de $250mm$, por tanto este lente es el f_1 de este montaje. Este lente se escogió puesto que según lo planteado en la Figura 2:

$$\begin{aligned} z &< f_1 \\ f &> f_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Por tanto se busca escoger un f_1 lo suficientemente grande para que z sea una distancia medible, pero un f_1 lo suficientemente pequeño para escoger f mayores. El lente de $250mm$ se ajusta correctamente a estas condiciones, como ha sido usado en otros experimentos [3].

Partiendo de esto es posible obtener los lentes y distancias necesarias para hallar los ángulos de la transformada fraccional a medir a través de las ecuaciones en la Figura 2. Estos valores se observan en el Cuadro I a continuación.

f (mm)	f' (mm)	θ (rad)	z (cm)	z' (cm)
1000	-	0.253	3.18	0
750	-	0.340	4.29	0
500	-	0.524	6.70	0
400	-	0.675	8.78	0
300	-	0.985	13.42	0
250	-	$\pi/2$	25.00	0
250	1000	1.823	25.00	3.18
250	750	1.911	25.00	4.29
250	500	2.094	25.00	6.70
250	400	2.246	25.00	8.78
250	300	2.556	25.00	13.42

Cuadro I. Valores hallados para medir transformada fraccional a diferentes ángulos usando relación entre θ , z , f y f_1 vista en la Figura 2.

III. RESULTADOS

Inicialmente, se observó la distribución espacial (los dos haces gaussianos) sin un lente f , el equivalente de una transformación de $\theta = 0$. Lo obtenido se observa en la Figura 4.

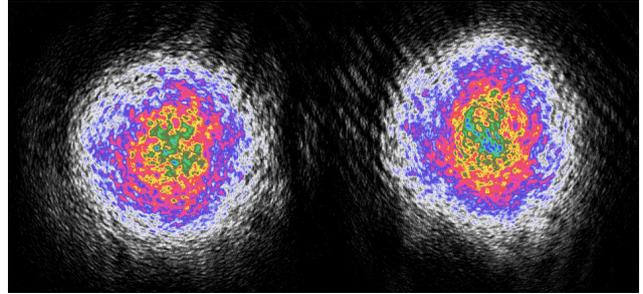


Figura 4. Transformada para $\theta = 0$ a $500mm$ del punto z_0 . Tiempo de exposición $9,11ms$. Filtro de cámara 4.5 ND. Tamaño de la imagen: $5,219mm$ (ancho) x $2,442mm$ (alto). Filtro pastel para mejor apreciación de la intensidad.

Al comparar con la figura espera teóricamente en Wolfram Mathematica se obtuvo la Figura 5. La curva experimental se obtuvo de realizar un perfil horizontal y promediar la intensidad con 10 pixeles hacia arriba y hacia abajo. La escala del eje x se obtuvo multiplicando los pixeles por la resolución de la cámara ($5.5\mu m$ tamaño de pixel).

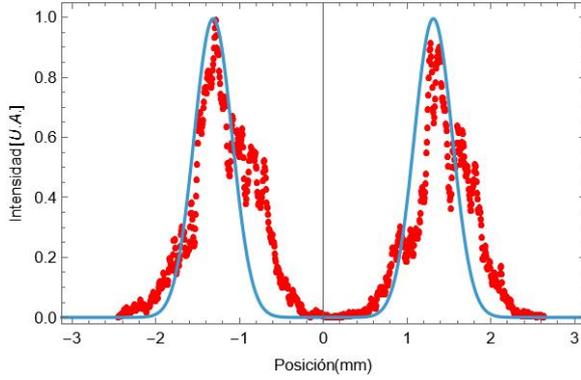


Figura 5. Comparación curva teórica con curva experimental. Perfil de intensidad haces gaussianos con separación $d = 1,31mm$ y regresión función doble gaussiana.

A través de la regresión *double gaussian* vista en la figura 5, se logró obtener que la distancia entre ambos haces es de $d = 1,31mm$ y la desviación estándar $a = 4,88 \text{ } 1/mm^2$. Con estos parámetros es posible graficar la figura esperada teóricamente para un ángulo θ cualquiera.

$$F(u, a, d, \theta) := |A \times B \times C| \quad (4)$$

$$\text{donde } A = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sin \theta}} \sqrt{\frac{\pi}{a - \frac{\cos \theta}{2}}} \quad (5)$$

$$B = \exp \left[-ad^2 - \frac{u^2}{4 \sin^2 \theta \left(a - \frac{\cos \theta}{2} \right)} + \frac{a^2 d^2}{a - \frac{\cos \theta}{2}} \right] \quad (6)$$

$$C = 2 \sin \left(-\frac{adu}{\sin \theta \left(a - \frac{\cos \theta}{2} \right)} \right) \quad (7)$$

Donde u es el rango en el eje x a graficar, d la distancia entre los haces gaussianos, θ el ángulo para el cual se quiere encontrar la transformada fraccional y a la desviación estándar.

En el caso de la transformada de Fourier completa ($f = 250mm$ y $z = 25mm$), se observa la imagen obtenida en la cámara en la Figura 6. Se obtuvo la escala del eje x igualmente multiplicando por la resolución de la cámara y reescalando con el factor $\frac{2\pi}{\lambda f_1}$ [4]. En este caso $f_1 = 250mm$ y $\lambda = 780nm$. La comparación con la curva teórica se observa en la Figura 7.

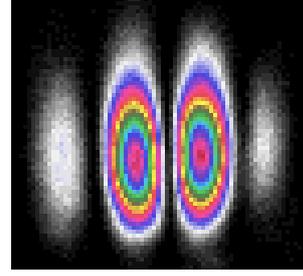


Figura 6. Transformada para $\theta = \pi/2$ a $500mm$ del punto z_0 . Tiempo de exposición $40,57ms$. Filtro de cámara 8.5 ND. Tamaño de la imagen: $0,402mm$ (ancho) x $0,374mm$ (alto). Filtro pastel para mejor apreciación de la intensidad.

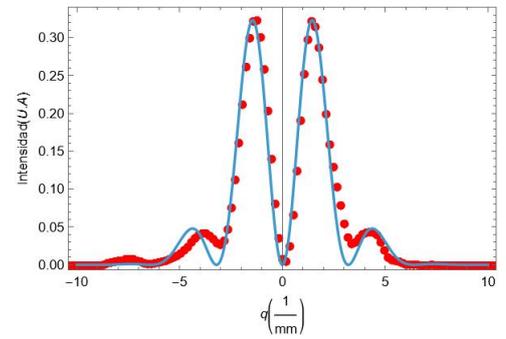


Figura 7. Comparación curva teórica con curva experimental. TFF de dos haces gaussianos con separación $d = 1,31mm$ para $\theta = \pi/2$.

IV. DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos demuestran la efectividad del montaje experimental para medir la transformada de Fourier de un sistema de dos haces gaussianos. La comparación entre los perfiles de intensidad teóricos y experimentales muestra una notable concordancia (Figuras 5 y 7).

Sin embargo, es preciso realizar medidas de una mayor cantidad de ángulos para comprobar la efectividad del montaje en hallar la transformada fraccional. El uso de un SLM podría facilitar el montaje al simular lentes de diferentes distancias focales con mayor precisión.

- [1] I. Hoover. Introducing the fractional fourier transform. 2013.
 [2] Adolf W. Lohmann. Image rotation, wigner rotation, and the fractional fourier transform. *Journal of the Optical Society of America A*, 10(10):2181–2186, October 1993.

- [3] Santiago Usuga. Medición óptica de la transformada fraccional de fourier, 2024.
 [4] Pedro Enrique Piñeros Lourenco. Emulating the Wigner function of an odd cat state by means of classical light fields, 2024.