

Medición óptica de la transformada fraccional de Fourier

Santiago Usuga*

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 5 de junio de 2024)

Se realizó la medición de las transformadas de Fourier fraccionales de dos haces gaussianos separados una distancia $d = 0,97mm$. Para esto, se implementó un montaje óptico que divide un láser con longitud de onda $\lambda = 808nm$ para luego hacerlos pasar por un sistema de transformaciones lineales que permiten obtener la FFT. Las mediciones se realizaron con una cámara CCD y los datos se procesaron por medio de la aplicación ImageJ. Utilizando estos datos y un algoritmo de reconstrucción 3D se logró obtener la función de Wigner para los dos haces gaussianos. Al comparar con la función teórica se puede observar que los dos picos centrales de la distribución aparecen en ambas gráficas; sin embargo, se necesitan más datos para obtener una función de Wigner menos ruidosa.

I. INTRODUCCIÓN

Recientemente se han realizado grandes avances en la preparación, propagación y detección de fuentes de luz. Esto es especialmente relevante para el caso de fuentes de luz que trabajan a nivel cuántico, como lo son las fuentes de un solo fotón, los estados squeezed o los estados de gato. El estudio de sus propiedades ha llevado al desarrollo de aplicaciones en computación cuántica, metrología cuántica, tomografía de coherencia óptico-cuántica, etc.

El estudio de las propiedades de estos estados se puede realizar mediante la función de Wigner, introducida por Eugene Wigner en 1932 [2]. Esta es una distribución de cuasiprobabilidad en el espacio de fase asociada a la función de onda que se obtiene a partir de la ecuación de Schrödinger y permite realizar correcciones cuánticas a la mecánica estadística clásica. Por lo tanto, el valor esperado de cualquier observable se puede calcular a partir de la función de Wigner, de la misma manera que se realiza en la aproximación de Schrödinger.

De acuerdo con Lohmann [3], la función de Wigner está relacionada con la transformada fraccional de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) mediante la transformada de Radón. Por lo tanto, si se implementa un mecanismo mediante el cual se puedan medir las FFT de una señal, es posible reconstruir la función de Wigner de dicho estado mediante la transformada inversa de Radón. Este fue precisamente el objetivo de este proyecto, en el cual se implementó un sistema óptico mediante el cual se obtuvieron las FFT de dos haces gaussianos separados una distancia $d = 0,99mm$. A partir de estas, se reconstruyó la función de Wigner de la fuente de luz y se pudo comparar con su función de Wigner teórica para verificar la exactitud de los datos obtenidos.

II. TEORÍA

De acuerdo con lo anterior, la función de Wigner permite representar un estado cuántico en el espacio de fase, lo que hace posible el estudio de sus propiedades. Esta se define como:

$$W(y, q_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(y - \frac{y'}{2} \right) \psi \left(y + \frac{y'}{2} \right) e^{-iq_y y'} dy'. \quad (1)$$

Por otro lado, la FFT es una generalización de la transformada de Fourier ordinaria asociada con un parámetro a que indica el número de veces que se aplica el operador de la FFT [5]. La transformada fraccional de Fourier se define como:

$$F^a \{ \psi(y) \} := (F \circ F \circ \dots \circ F) \{ \psi(y) \} = \tilde{\psi}_a(q_y), \quad (2)$$

donde $F^{a=0}$ es el operador identidad y $F^{a=1}$ es la transformada de Fourier ordinaria ($\theta = \pi/2$). De ahí que $\theta = a\frac{\pi}{2}$. Además, a igual que la transformada de Fourier ordinaria, esta transformación es periódica con período 2π , por lo cual, los valores de a se pueden restringir a $(-2, 2]$ o $[0, 4)$. Por último, esta cumple con el principio de aditividad del índice, por lo cual $F^{a+a'} \{ \psi(y) \} = F^a \{ F^{a'} \{ \psi(y) \} \}$.

Adicionalmente, la transformada de radón es una transformación integral que proyecta cualquier función $\psi(y, q_y)$ en el espacio de fase sobre eje que hace un ángulo θ con respecto al eje de la variable y . Esta se define como:

$$p(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, q_y) \delta(y \cos \theta + q_y \sin \theta - s) dy dq_y. \quad (3)$$

En la figura 1 se observa un gráfico donde se representan cada uno de los parámetros de la transformada de Radón.

* Correo institucional: s.usuga@uniandes.edu.co

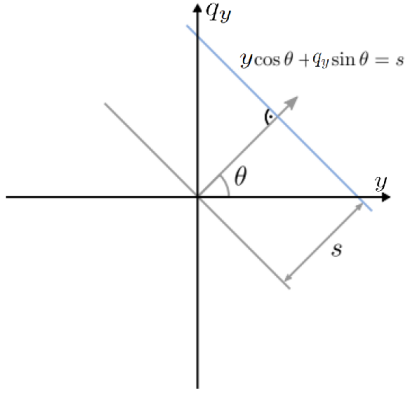


Figura 1. Parámetros transformada de Radón. Tomada de [1]

Al aplicar esta transformación a la función, se obtiene su distribución marginal para la cuadratura asociada con el ángulo θ . Aquí yace su importancia, debido a que la distribución marginal de la función de Wigner en el espacio de fase tiene la forma de una transformada de Radón.

Además, la transformada de Radón de la función de Wigner de un estado se relaciona con la transformada de Fourier de manera que:

$$R_{\theta} [W_E] = |\tilde{E}_a(y)|^2, \quad (4)$$

donde $\tilde{E}_a(y)$ es, en este caso, la FFT del campo eléctrico generado por una señal y $R_{\theta} [W_E]$ es la transformada de Radón de la función de Wigner de dicho campo.

Finalmente, la señal de los dos haces gaussianos estudiados en este experimento se representa como:

$$\psi(y) = N(e^{-\alpha(y-d)^2} - e^{-\alpha(y+d)^2}), \quad (5)$$

donde d es la separación entre los dos haces y α esta relacionada con el ancho de la gaussiana tal que: $\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$, donde σ^2 es la desviación estándar de la distribución.

III. MONTAJE EXPERIMENTAL Y METODOLOGÍA

El montaje óptico utilizado en el laboratorio se observa en la figura 2.

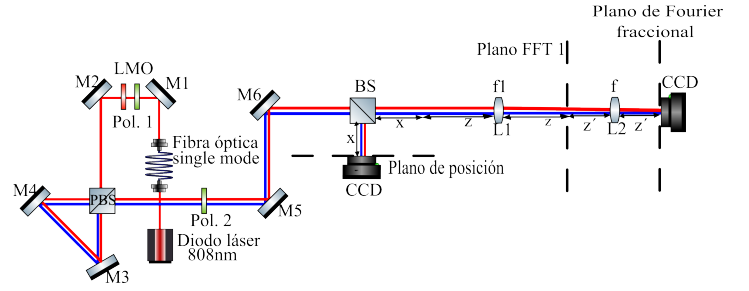


Figura 2. Diagrama del montaje experimental que se utilizará para realizar este proyecto. Se puede observar la fuente de luz (diodo láser $\lambda = 808nm$) y los elementos ópticos utilizados para dividir el haz y obtener las transformadas fraccionales de Fourier de la señal: fibra óptica *single mode*, M1, M2, M3, M4, M5 y M6 son espejos, dos polarizadores (pol. 1 y pol. 2), lamina de media onda (LMO), la *Tuneable Beam Displacer* (TBD); un divisor de haces (BS) y dos lentes de distancia focal f_1 y f .

Se acopló el haz a una fibra óptica *single mode* para obtener un perfil espacial gaussiano. Luego se redirigió el haz con dos espejos M1 y M2, en medio de los cuales se montó un primer polarizador (pol. 1) para tener una polarización definida junto a una lámina de media onda (LMO) que induce un desfase en las dos componentes perpendiculares de polarización. Se hizo pasar el haz luego por un PBS (polarizing beam splitter) ubicado en la TBD, que lo dividió en dos haces con polarizaciones perpendiculares. Uno de estos se transmite y el otro se refleja y con ayuda de dos espejos (M3 y M4) se hizo pasar nuevamente por un polarizador (Pol. 2), después del cual ambos haces salen con polarización diagonal. Los espejos M5 y M6 se utilizaron para redirigir el haz hacia un BS (beam splitter) en el cual se dividieron ambos haces nuevamente. En uno de los puertos de salida se tomó la señal inicial y en el otro se montó un sistema $2z$ con una lente biconvexa de distancia focal f teniendo como referencia el lente de distancia focal $f_1 = 250mm$. Finalmente, se posicionó la cámara CCD con la cual se realizaron las mediciones de las FFT.

Para aprovechar el principio de aditividad del índice de la FFT, se implementó un segundo sistema $2z$ con un lente de distancia focal f' . Esto hizo posible realizar diferentes transformadas a la transformada de orden uno, de manera que se midieron transformaciones para $\theta < \pi/2$.

Los datos de las FFT de los dos haces se obtuvieron al realizar la suma de todos los pixeles de la imágenes tomadas con la CCD mediante *imagej*. Con estos datos, se obtuvo una imagen 3D de la función de Wigner de los dos haces mediante un algoritmo de reconstrucción diseñado por Andrés Martínez en su tesis de pregrado [4].

IV. MEDICIONES

En el laboratorio se realizó la medición de las FFT asociadas a los parámetros de la tabla I.

$\theta[\text{rad}]$	$f[\text{mm}]$	$z[\text{cm}]$
0,985	300	$13,42 \pm 0,01$
0,675	400	$8,78 \pm 0,01$
0,524	500	$6,70 \pm 0,01$
0,340	750	$4,29 \pm 0,01$
0,253	1000	$3,18 \pm 0,01$
$\pi/2$	250	$25 \pm 0,01$
2,556	$f1 = 250, f = 300$	$82,92 \pm 0,01$
2,246	$f1 = 250, f = 300$	$52,04 \pm 0,01$
2,094	$f1 = 250, f = 300$	$43,30 \pm 0,01$
1,911	$f1 = 250, f = 300$	$35,36 \pm 0,01$
1,823	$f1 = 250, f = 300$	$32,27 \pm 0,01$

Cuadro I. Parámetros utilizados al momento de medir la FFT de los dos haces gaussianos. De acuerdo con Piñeros [5], estos valores fueron calculados como: $f = \frac{f_1}{\sin \theta}$ y $z = \tan(\frac{\theta}{2})f_1$. En donde se observan dos valores para las distancias focales f y f_1 fue donde se utilizaron los sistemas $2z$ y $2z'$.

Adicionalmente, en la figura 3 se observa la gráfica de los datos de las FFT ($|\tilde{E}_a(y)|^2$) en función de θ y la coordenada x transversal a la dirección de propagación.

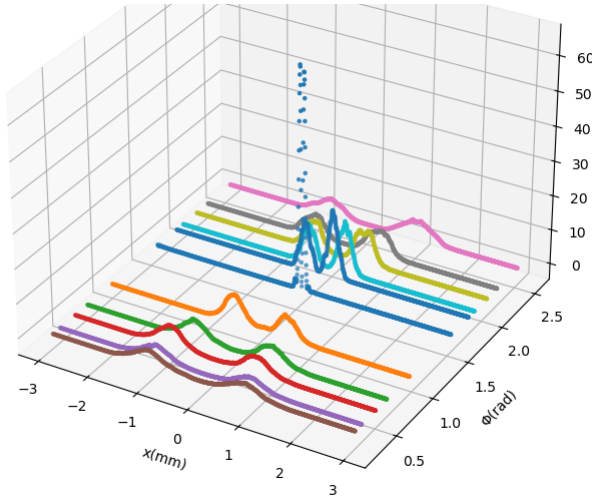


Figura 3. FFT ($|\tilde{E}_a(y)|^2$) en función de θ y la coordenada x transversal a la dirección de propagación

A partir de las transformadas medidas y utilizando el algoritmo de reconstrucción 3D anteriormente mencionado, se obtuvo la función de Wigner que se observa en la figura 4:

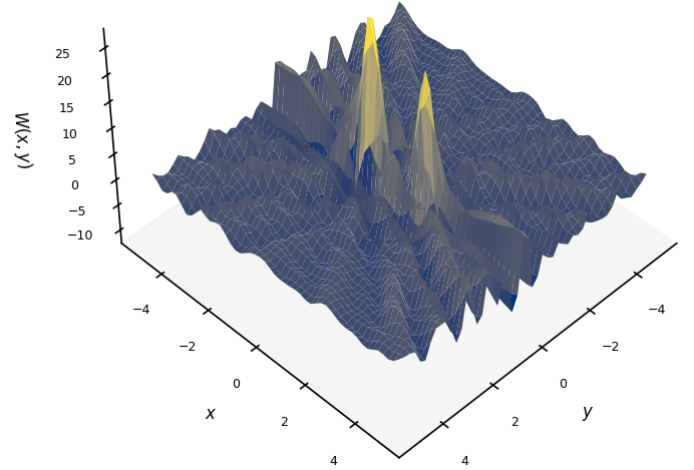


Figura 4. Función de Wigner de dos haces gaussianos separados una distancia $d = 0,98\text{mm}$.

Finalmente, la función de Wigner teórica para este estado se ilustra en la figura 5.

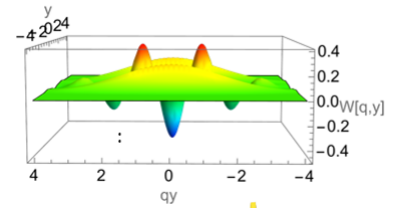


Figura 5. Función de Wigner teórica de dos haces gaussianos separados una distancia $d = 0,98\text{mm}$.

V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Al comparar la función de Wigner teórica 5 y la función de Wigner obtenida experimentalmente 4 se evidencian diferencias, especialmente en los valles debido a la contribución de diferentes tipos de ruido, como el shot noise. Además, dado que no se tomaron suficientes datos con estructura (FFT con interferencia), el algoritmo induce cierto porcentaje de error estadístico a la función de Wigner obtenida. Sin embargo, se lograron evidenciar los dos picos centrales de la función.

Finalmente se logro concluir lo siguiente: El sistema óptico implementado permite medir las FFT del campo eléctrico unidimensional de dos haces gaussianos separados una distancia $d=1\text{mm}$.

Es posible tomar transformadas $\theta > \pi/2$ teniendo en cuenta la propiedad de aditividad de la FFT, lo que permite medir más distribuciones marginales y reconstruir de mejor manera la función de Wigner.

Es necesario tomar más datos para que la función de Wigner reconstruida se ajuste de mejor manera al resultado teórico.

- [1] Christlein, V., Hornegger, J., Maier, A., and Steidl, S. (2018). *Medical Imaging Systems: An Introductory Guide*.
- [2] Ferry, D. K. and Nedjalkov, M. (2018). *The Wigner function in science and technology*. IoP Publishing.
- [3] Lohmann, A. W. (1993). Image rotation, wigner rotation, and the fractional fourier transform. *JOSA A*, **10**(10):2181–2186.
- [4] Martínez Silva, A. (2020). Characterization of quantum states of light by means of homodyne detection and reconstruction of wigner functions. Technical report, Universidad de los Andes.
- [5] Piñeros Lourenco, P. E. (2023). Emulating the wigner function of an odd cat state by means of classical light fields. Technical report, Universidad de los Andes.