

# Medición de la Transformada Fraccional de Fourier (FrFT) de dos haces gaussianos para reconstruir la Función de Wigner

Matilde Simental Herrera\*

*Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.*

*Tecnológico de Monterrey, Monterrey, México*

(Dated: 11 de diciembre de 2025)

En este proyecto se midieron distintas Transformadas Fraccionales de Fourier (FrFT) mediante un sistema óptico y se compararon con sus predicciones teóricas. Se mostró que la discrepancia reportada en trabajos previos se debía a la falta de un escalamiento adecuado en los parámetros espaciales y en los datos experimentales. Al incorporar el factor de normalización  $L = \sqrt{2\pi/(\lambda f_0)}$ , la concordancia entre teoría y experimento se volvió evidente para diferentes órdenes fraccionales. Las FrFT obtenidas experimentalmente se utilizaron como proyecciones de la función de Wigner, aprovechando que cada orden fraccional corresponde a una transformación de Radon de la Wigner rotada un ángulo  $\theta$ . Los resultados validan la implementación óptica de la FrFT y establecen las condiciones necesarias para una futura reconstrucción tomográfica completa de la función de Wigner, incluyendo la necesidad de mediciones con estructura interferencial y de un rango suficientemente amplio de ángulos.

## I. INTRODUCCIÓN

En este proyecto experimental se obtuvieron distintas mediciones de Transformadas Fraccionales de Fourier (FrFT) mediante un sistema óptico, además se verificó su coincidencia con las simulaciones teóricas de estas, algo que en trabajos previos ([4], [5], [1], [2]) no se había conseguido observar. Estas mediciones se realizaron con el propósito de reconstruir la función de Wigner utilizando un código previamente desarrollado que implementa la transformada inversa de Radon. El resultado final de esta reconstrucción puede consultarse en la tesis de pregrado de Jose Alejandro Gutiérrez Cifuentes.

La función de Wigner  $W(x, p)$  es una representación en espacio de fases que describe simultáneamente la información espacial y frecuencial de una señal óptica  $u(x)$ . Por ende, es útil para analizar sistemas ópticos. Cada medición de intensidad de una señal transformada por un sistema óptico, corresponde a una *proyección* de la función de Wigner sobre alguna dirección del espacio de fases. Matemáticamente, esta proyección es una transformada de Radon. Para un ángulo de proyección  $\theta$ , la Radon genera una sombra o proyección de la Wigner sobre un eje rotado  $\theta$  en el espacio de fases, el resultado es una marginal, equivalente a una intensidad observable; medir una intensidad es medir una proyección de la Wigner.

Según Lohmann [3], la Transformada Fraccional de Fourier de orden  $P$ , rota la Wigner un ángulo  $\theta = \frac{P\pi}{2}$ . Medir una señal después de un sistema óptico que implementa una Transformada Fraccional de Fourier (FrFT en inglés) de orden  $P$ , equivale a obtener la transformada de Radon de la función de Wigner

rotada un ángulo  $\theta$ . Esta relación permite realizar una reconstrucción tomográfica: obteniendo experimentalmente diferentes órdenes de FrFT, obtenemos distintas proyecciones de Radon, que son marginales de la Wigner, y con todas ellas se puede reconstruir la función de Wigner mediante la transformada de Radon inversa.

## II. MARCO TEÓRICO

La FrFT se define matemáticamente como (1)

$$F_\theta(p) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \frac{1 - i \cot \theta}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{i}{2} (x^2 + p^2) \cot \theta - i x p \csc \theta \right] dx. \quad (1)$$

Donde  $f(x)$  es la señal de entrada sobre la cual se aplica la FrFT,  $p$  es la variable del dominio transformado,  $\theta$  es el ángulo que determina cuánto se rota en el espacio de fases; para  $\theta = 0$  se tiene la identidad, y para  $\theta = \pi/2$  es la transformada de Fourier clásica.

Aplicando Fourier optics para el setup que implementa la FrFT, el cual se detalla en la Sección III, se puede mostrar que si la amplitud del campo eléctrico incidente es  $f(x)$ , el campo eléctrico después de la propagación a través de una distancia  $z$ , una lente  $f$ , y una distancia  $z$  de nuevo, resulta una función  $g(y)$  descrita por

$$g(y) = \frac{1}{\lambda^2 z^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp \left[ i\pi \frac{(x^2 + y^2) \left( 1 - \frac{1}{2-z/f} \right)}{\lambda z} - i 2\pi \frac{xy}{\lambda z(2 - z/f)} \right] dx \quad (2)$$

\* Correo institucional: a.simentalh@uniandes.edu.co

Donde  $\lambda$  es la longitud de onda del láser,  $x$  es la variable del dominio original y  $y$  es la variable después de la propagación. Al igualar las ecuaciones (1) y (II) se pueden identificar los parámetros necesarios para implementar experimentalmente la FrFT. No obstante, en (1) las variables  $x$  y  $p$  son adimensionales, mientras que en (II) poseen unidades físicas. Para poder compararlas término a término es necesario adimensionalizar las variables en (II) mediante el factor

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f_0}}.$$

De este modo, al redefinir  $x' = x\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f_0}}$  y  $y' = y\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f_0}}$ , la expresión óptica toma la misma forma funcional que la definición matemática de la FrFT. Al comparar ambas ecuaciones, se obtienen las relaciones

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{2z - z^2/f}\right) f_1}{z} = \cot \theta, \quad \frac{f_1}{2z - z^2/f} = \csc \theta,$$

que resultan en

$$z = f_0 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad f = \frac{f_0}{\sin \theta}, \quad (3)$$

los cuales son los parámetros utilizados para implementar experimentalmente la FrFT. El parámetro  $f_0$  es arbitrario y corresponde a la distancia focal de la lente que produce  $\theta = \pi/2$  (la FFT). Debe elegirse de modo que  $z < f_0$  y  $f > f_0$ : suficientemente grande para que  $z$  sea medible en el laboratorio, pero no tan grande como para limitar la disponibilidad de lentes  $f$  necesarias para generar distintos órdenes fraccionales.

Tras esta normalización, la FrFT óptica no actúa sobre la función original  $f(x)$ , sino sobre la versión escalada  $f\left(x'\sqrt{\lambda f_0/2\pi}\right)$ . En el caso particular  $\theta = \pi/2$ , que corresponde a la Transformada de Fourier completa, se obtiene simplemente  $f = f_0$  y  $z = f_0$ . Esto significa que el sistema óptico implementa la FFT de una función escalada por  $\sqrt{\lambda f_0/2\pi}$ , y que, por la propiedad habitual de las transformadas de Fourier, la salida debe escalarse por el factor inverso  $\sqrt{2\pi/(\lambda f_0)}$ . En las transformadas fraccionales con  $\theta \neq \pi/2$ , esta consideración de escalamiento sigue siendo necesaria, ya que afecta directamente la relación entre la FrFT teórica y la señal obtenida experimentalmente.

### III. PROTOCOLO PARA LA MEDICIÓN DE LA FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM

La medición de la Transformada Fraccional de Fourier (FrFT) se lleva a cabo siguiendo un protocolo experimental específico que involucra la generación de haces

paralelos con polarizaciones ortogonales, el uso de lentes de diferente distancia focal, y un sistema de captura basado en un detector CCD. El procedimiento detallado se puede consultar en la sección de Anexos VIII.

### IV. MONTAJE Y PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

El montaje utilizado en la mesa óptica para medir distintas Transformadas Fraccionales de Fourier se muestra en el paso 1 del protocolo que se encuentra en la Sección VIII. En este, se generan dos haces paralelos con polarizaciones ortogonales utilizando una PTBD. Después de pasar por el segundo polarizador lineal, se implementa el arreglo para medir las Transformadas Fraccionales de Fourier.

### V. IMPLEMENTACIÓN DE LA FRFT PARA DOS HACES GAUSSIANOS

Para evaluar experimentalmente la Transformada Fraccional de Fourier (FrFT) utilizamos como entrada una función compuesta por dos haces gaussianos (generados como se muestra en el protocolo paso 1), separados por una distancia  $2d$  y con un ancho característico  $1/\sqrt{2a}$ .

El perfil espacial modelado teóricamente es

$$f(x) = \frac{\sqrt{a} \left( e^{-a(x-d)^2} + e^{-a(d+x)^2} \right)^2}{\sqrt{2\pi} (e^{-2ad^2} + 1)},$$

el cual está normalizado de modo que  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$ . Como se mencionó en la Sección II, para comparar este modelo con la implementación óptica de la FrFT, la variable espacial debe escalarse mediante el factor  $L = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f_0}}$ . Al reescribir la función en términos de  $x'$ , los parámetros se transforman según

$$d' = d\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f_0}}, \quad a' = a \frac{\lambda f_0}{2\pi},$$

lo que permite expresar la distribución de entrada en la forma compatible con la definición matemática de la FrFT:

$$f'(x') = \frac{\sqrt{a'} \left( e^{-a'(x'-d')^2} + e^{-a'(d'+x')^2} \right)^2}{\sqrt{2\pi} (e^{-2a'd'^2} + 1)}.$$

Por lo tanto, al generar el modelo teórico de las distintas FrFT es necesario escalar los parámetros  $d$  y  $a$  según las transformaciones anteriores. En cuanto a la

señal obtenida experimentalmente, solo requiere multiplicarse por el factor  $\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f_0}}$ , correspondiente a la propiedad de escalamiento de las Transformadas de Fourier. Con estos ajustes, es posible comparar teoría y experimento bajo la misma normalización. En la sección de resultados VI se observa la concordancia entre el modelo teórico y los datos experimentales.

Entonces, al generar el modelo teórico para las distintas FrFT, es necesario escalar  $d$  y  $a$ . En cuanto a la señal obtenida experimentalmente, únicamente se multiplica por el mismo factor  $L$  propio de la propiedad habitual de las Transformadas de Fourier. Así con estos escalamientos, en la sección de resultados se muestra la concordancia entre la teoría y el experimento.

## VI. RESULTADOS EXPERIMENTALES

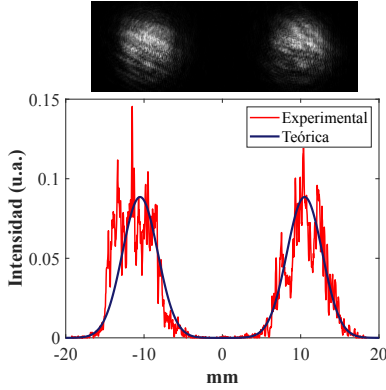


Figura 1: Captura e vcxperimental del haz en  $z_0$  (arriba) y perfil de intensidad experimental en la línea roja, y el ajuste de ambas gaussianas en la línea azul.

En la Figura 1 se muestra el perfil experimental del haz en el plano inicial. Este resultado se obtiene tras escalar la coordenada  $x$  mediante el factor  $\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f_0}}$ , como se describió en la Sección II, y normalizar la intensidad en  $y$  de modo que el área bajo la curva sea igual a 1. Los parámetros del ajuste teórico (línea azul) corresponden a  $d = 3.45$  mm, que determina la separación entre las gaussianas, y  $a = 1.98 \text{ mm}^{-2}$ , relacionado con el ancho mediante  $1/\sqrt{2a}$ .

En la Figura 2 se presenta la comparación entre los perfiles de intensidad experimental y teórico para tres órdenes fraccionales:  $\theta = 0.927 \text{ rad}$ ,  $\theta = 1.55 \text{ rad}$  y  $\theta = \pi/2$ . Al aplicar el escalamiento de los parámetros de la señal,  $a' = a/L^2$  y  $d' = dL$ , con  $L = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f_0}}$ , se obtiene una correspondencia notable entre las mediciones y las predicciones teóricas, validando la implementación

experimental de las distintas FrFT.

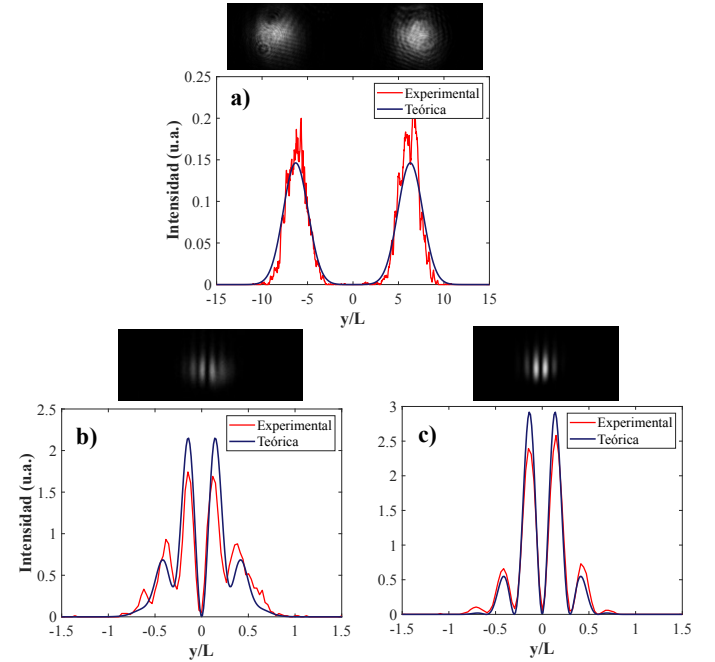


Figura 2: (a) Comparación entre la FrFT experimental y teórica para una lente de  $f = 250$  mm, con ángulo  $\theta = 0.927 \text{ rad} = 53.13^\circ$  ( $P = \dots$ ). (b) Comparación entre la FrFT experimental y teórica obtenida mediante la concatenación de lentes de  $f = 300, 500$  y  $500$  mm, correspondiente a  $\theta = 1.55 \text{ rad} = 88.92^\circ$  ( $P = \dots$ ). (c) Comparación entre la Transformada de Fourier experimental y teórica para  $\theta = \pi/2$ .

## VII. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

La discrepancia inicial entre los resultados teóricos y experimentales se debía a que no se estaba considerando el factor de escalamiento

$$L = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f_0}},$$

el cual debe aplicarse tanto a los parámetros de la gaussiana ( $a$  y  $d$ ) como a los datos experimentales. En particular, el eje horizontal de los perfiles medidos también debe multiplicarse por  $L$  para que todas las magnitudes sean adimensionales y directamente comparables.

Para obtener una reconstrucción precisa de la función de Wigner, es necesario contar con el mayor número posible de mediciones de FrFT, y que estas presenten una forma estructurada, es decir, debe observarse interferencia entre los dos haces gaussianos, ya que esta información es esencial para reproducir la región de interferencia de la función de Wigner. En el experimento

| No. Lentes | Combinación de lentes $f_i$ (mm) | Ángulo Total (deg) | $z_1$ (cm) | $z_2$ (cm) | $z_3$ (cm) |
|------------|----------------------------------|--------------------|------------|------------|------------|
| 2          | 250, 400                         | 83.13              | 10         | 5.36       |            |
| 2          | 300, 300                         | 83.621             | 7.64       | 7.64       |            |
| 3          | 250, 500, 1000                   | 88.245             | 10         | 4.17       | 2.02       |
| 3          | 250, 700                         | 86.333             | 10         | 2.92       | 2.92       |
| 3          | 300, 400, 700                    | 88.412             | 7.64       | 5.36       | 2.92       |
| 3          | 300, 500, 500                    | 88.967             | 7.64       | 4.17       | 2.02       |
| 3          | 300, 500, 700                    | 88.578             | 7.64       | 4.17       | 2.02       |
| 4          | 250, 1000, 1000, 1000            | 87.741             | 7.64       | 4.17       | 2.02       |
| 4          | 300, 500, 1000, 1000             | 88.462             | 7.64       | 4.17       | 2.02       |
| 4          | 300, 700, 1000, 1000             | 88.55              | 7.64       | 4.17       | 2.92       |
| 4          | 400, 400, 500, 1000              | 88.074             | 5.36       | 5.36       | 2.92       |
| 4          | 400, 500, 500, 1000              | 88.693             | 5.36       | 5.36       | 2.92       |
| 4          | 400, 500, 700, 1000              | 88.659             | 5.36       | 5.36       | 2.92       |
| 4          | 500, 500, 500, 700               | 88.366             | 5.36       | 4.17       | 2.92       |
| 4          | 500, 500, 500, 1000              | 88.539             | 5.36       | 4.17       | 2.92       |
| 4          | 500, 500, 700, 700               | 88.277             | 5.36       | 4.17       | 2.92       |

Cuadro I: Parámetros experimentales para mediciones con diferentes combinaciones de lentes.

realizado, dicha interferencia comienza a ser visible a partir de un ángulo aproximado de  $\theta \approx 86^\circ$ . Para ángulos menores, como en la Figura 2(a) correspondiente a  $\theta = 53.13^\circ$ , solo se observan dos picos separados. Conforme aumenta  $\theta$ , ambos picos se aproximan entre sí hasta producir un patrón de interferencia.

Por lo tanto, las mediciones de FrFT destinadas a la reconstrucción de la función de Wigner deben obtenerse preferentemente para ángulos a partir de este umbral. Para automatizar la selección de configuraciones ópticas adecuadas, se desarrolló un código cuyo *input* consiste en la lista de lentes disponibles en el laboratorio, el ran-

go de ángulos  $\theta$  deseado y la cantidad máxima permitida de lentes concatenados.

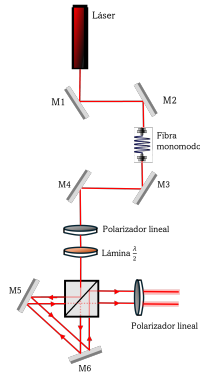
En esta iteración, la lista de lentes disponibles (en mm) fue [200, 250, 300, 400, 500, 700, 1000], la cantidad máxima de lentes concatenados fue 4, y el rango considerado fue  $80^\circ < \theta < 90^\circ$ . Las combinaciones resultantes se muestran en la Tabla I.

## VIII. ANEXOS

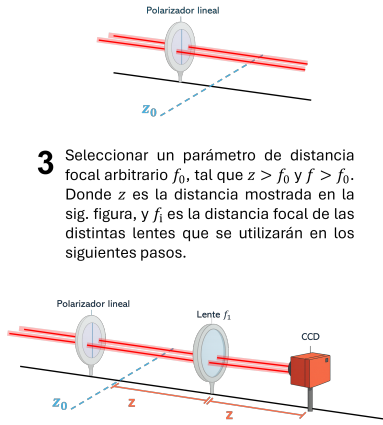
- 
- [1] Cifuentes, J. A. G. (2024). Medición de la transformada fraccionaria de fourier de dos haces de luz paralelos en un sistema Óptico. Technical report, Universidad de los Andes. Trabajo de grado.
  - [2] Granados, P. S. (2025). Medición de la transformada fraccional de fourier. Technical report, Universidad de los Andes. Informe experimental.
  - [3] Lohmann, A. W. (1993). Image rotation, wigner rotation, and the fractional fourier transform. *Journal of the Optical Society of America A*, 10(10):2181–2186.
  - [4] Lourenço, P. E. P. (2022). Implementación Óptica de la transformada de fourier espacial. Technical report, Universidad de los Andes. Reporte experimental.
  - [5] Usuga, S. (2024). Medición Óptica de la transformada fraccional de fourier. Technical report, Universidad de los Andes. Proyecto experimental.

## Medición de la Transformada Fraccional de Fourier de dos haces paralelos

- 1** Generar dos haces paralelos con polarizaciones ortogonales utilizando el siguiente arreglo experimental.



- 2** Definir un plano  $z_0$  una vez generados los haces paralelos, y registrar una imagen con la CCD en dicho plano inicial.



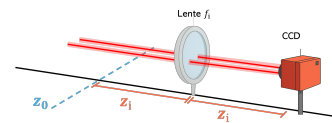
- 3** Seleccionar un parámetro de distancia focal arbitrario  $f_0$ , tal que  $z > f_0$  y  $f > f_0$ . Donde  $z$  es la distancia mostrada en la sig. figura, y  $f_i$  es la distancia focal de las distintas lentes que se utilizarán en los siguientes pasos.

- 4** Elegir una lente con distancia focal  $f_i$ , con la cual se medirá la Transformada Fraccional de Fourier de orden  $P$ . El orden  $P$  y el ángulo  $\theta$  en el espacio de fase se relacionan por:

$$P = \frac{2\theta}{\pi}.$$

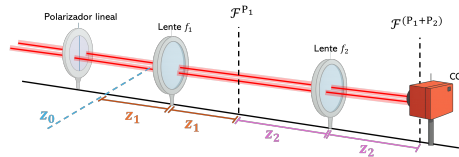
A partir de  $f_i$  se puede calcular  $\theta$  y la distancia  $z$  a la que se ubicará el lente, en el montaje de la Figura mostrada en el paso 3.

$$\theta_i = \sin^{-1}\left(\frac{f_0}{f_i}\right) \quad z_i = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) f_0$$



- 5** Variar  $f_i$  para obtener diferentes FrFT.

- 6** Para ampliar el número de posibles órdenes de FrFT, se concatenan dos o más lentes, de modo que las transformadas de orden  $\alpha_i$  se suman, obteniendo así la transformada  $\mathcal{F}(\Sigma_i P_i)$ .



Las posiciones del segundo lente  $f_2$  y la CCD, se calculan con las mismas ecuaciones del paso 4, utilizando el mismo parámetro  $f_0$ .

Figura 3: Protocolo experimental para la medición de una Transformada Fraccional de Fourier.