

Calculo de sección eficaz de absorción de dos fotones



Miguel Ángel Gonzalez Jaimes
Departamento de Física

Asesora:
Mayerlin Nuñez Portela

Documento Final para la materia PROYECTO
TEÓRICO/COMPUTACIONAL 202110

Bogotá, Colombia
2 de junio de 2021

Resumen

La absorción de dos fotones (TPA) ha permitido desarrollos en el campo de almacenamiento de datos en 3D, así como microscopía y técnicas para la creación de imágenes médicas. Este proceso óptico no lineal consiste en la estimulación de un átomo, tal que su nivel de energía aumente al tomar la energía dada por 2 fotones provenientes de haces iguales o diferentes, en tanto que la suma de las frecuencias sea equivalente a la frecuencia necesaria para que se dé una transición en el átomo. En este proyecto se busca analizar el proceso de TPA en átomo de Cesio, empezando desde su estructura atómica, incluyendo factores como su estructura fina e hiperfina, hasta el cómo interactúa con la luz. Lo anterior se logra modelando la interacción con los átomos de Cesio a partir de perturbaciones dependientes del tiempo. En base a esto, empleando teoría de perturbaciones de primer orden, se indaga el cómo plantear un proceso de absorción de un fotón por parte de un átomo de Cesio, tomando como referencia modelos anteriores para otros vapores alcalinos. Con lo anterior, se busca extender este análisis utilizando teoría de perturbaciones de segundo orden dependiente del tiempo para el proceso de absorción de dos fotones con el fin de llegar a una expresión que describa la sección eficaz en esta interacción. Luego, se verifica la validez de estos resultados comparando con resultados experimentales previos. En este sentido, se realizan cálculos que detallen las transiciones que se dan entre los niveles de la estructura hiperfina del Cesio por medio del proceso de absorción de un fotón dando cuenta de su sección eficaz, al emplear adicionalmente las ecuaciones ópticas de Bloch. De igual manera, se expanden las perturbaciones a segundo orden con el fin de calcular la tasa de transiciones dada por absorción de dos fotones, enfocándose netamente en el proceso de absorción. Estos procesos matemáticos dan cuenta de una expresión que describe apropiadamente la sección eficaz de absorción de un fotón en base a su exactitud con respecto a valores experimentales hallados en la literatura. Por otro lado, la expresión hallada para la sección eficaz para el proceso de TPA en átomos alcalinos presenta una magnitud que se puede comparar con la sección eficaz reportada para ciertas moléculas orgánicas. De esta forma se concluye que se requiere un desarrollo más a fondo del proceso con el fin de hallar una expresión más acorde a valores experimentales.

Abstract

Two-photon absorption (TPA) has enabled developments in the field of 3D data storage, as well as microscopy and medical imaging techniques. This nonlinear optical process consists of the stimulation of an atom, such that its energy level increases by taking the energy given by 2 photons coming from equal or different beams, as long as the sum of the frequencies is equivalent to the frequency necessary for a transition to occur in the atom. In this project we seek to analyze the TPA process in Cesium atom, starting from its atomic structure, including factors such as its fine and hyperfine structure, to how it interacts with light. This is achieved by modeling the interaction with cesium atoms from time-dependent perturbations. Based on this, using first order perturbation theory, it is investigated how to propose a process of absorption of a photon by a cesium atom, taking as a reference previous models for other alkaline vapors. With the above, we seek to extend this analysis using time-dependent second-order perturbation theory for the two-photon absorption process in order to arrive at an expression that describes the cross section in this interaction. Then, the validity of these results is verified by comparing with previous experimental results. In this sense, calculations are carried out to detail the transitions that occur between the levels of the hyperfine structure of cesium by means of the process of absorption of a photon giving account of its cross section, by additionally employing the Bloch optical equations. Likewise, the perturbations are expanded to second order in order to calculate the rate of transitions given by two-photon absorption, focusing clearly on the absorption process. These mathematical processes yield an expression that properly describes the absorption cross section of a photon based on its accuracy with respect to experimental values found in the literature. On the other hand, the expression found for the cross section for the TPA process in alkaline atoms presents a magnitude that can be compared with the cross section reported for certain organic molecules. Thus, it is concluded that further development of the process is required in order to find an expression more in agreement with experimental values.

Índice general

Resumen	I
Índice general	III
Índice de cuadros	IV
Índice de figuras	V
I. Introducción	1
1.1. Estado del arte	2
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivo general	3
1.2.2. Objetivos específicos	3
II. Marco Teórico	4
2.1. Estructura Fina e Hiperfina	4
2.2. Teoría de Perturbaciones	6
III. Desarrollo del trabajo	13
3.1. Absorción de un fotón	13
3.2. Absorción de 2 fotones	18
IV. Resultados y análisis	24
4.1. Absorción de un fotón	24
4.1.1. Transición $6S_{1/2} \rightarrow 6P_{1/2}$	25
4.1.2. Transición $6S_{1/2} \rightarrow 6P_{3/2}$	25
4.1.3. Transición $6P_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$	25
4.1.4. Transición $6P_{3/2} \rightarrow 8S_{1/2}$	26
4.2. Absorción de dos fotones	26
V. Conclusiones	28
A. Cálculo de energía para Estructura Fina e Hiperfina	29

Índice de cuadros

2.1. Reglas de transición para transiciones eléctricas dipolares (E1)	11
2.2. Reglas de transición para transiciones por dos fotones	12
4.1. Dipolos eléctricos para transiciones de un fotón en Cesio	25

Índice de figuras

1.1. Degeneración de TPA	1
2.1. Estados intermedios en absorción de dos fotones	10
2.2. Transiciones eléctricas dipolares en el Cesio	11
3.1. Absorción de un fotón	13
3.2. Absorción de un fotón en bloque de material	17
4.1. Esquema de niveles de energía para la transición $6S_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$	24
A.1. Estructura Fina e Hiperfina para la línea D_2 del Cesio	33

Capítulo I

Introducción

La absorción de dos fotones, o TPA por sus siglas en inglés (Two-Photon Absorption), es un proceso por el cual un átomo absorbe dos fotones, tal que la energía de estos induzca una transición del estado base de energía E_g a un estado superior E_f . A pesar de que el proceso es denominado como una absorción simultánea, se tiene que en realidad existe una diferencia temporal en la llegada de los fotones tal que cuando el átomo absorbe el primer fotón que llega, con energía E_1 o también $\hbar\omega_1$, este le permite ascender a un estado intermedio o *virtual* con una energía asociada $E_g + E_1$. Este estado intermedio posee una vida media τ que, aunque no puede ser medida directamente debido a que el átomo no posee un eigenestado con la energía correspondiente a este estado, se puede estimar su magnitud en base a la relación de incertidumbre ($\tau\Delta E \sim \hbar/2$) tal que esta suele ser un valor cercano a 10^{-15} s [1-3]. Una vez el átomo está en este estado virtual, si, dentro del marco de tiempo τ , este absorbe un segundo fotón con energía E_2 tal que se realice una segunda excitación, el átomo podría subir a un estado final de energía E_f . Cabe aclarar que tanto el estado inicial como el estado final son denominados estados reales debido a que son eigenestados del átomo. De igual manera, se tiene que, si las energías de los fotones incidentes es la misma, el proceso se denomina “degenerado” y si son diferentes este es un caso “no-degenerado” [4] tal y como se ve en la Figura 1.1.

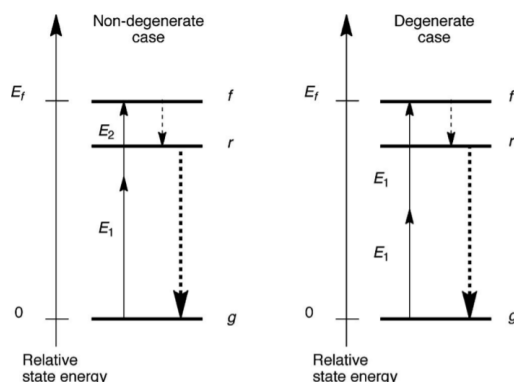


Figura 1.1: Esquema de los niveles de energía para un proceso de absorción de dos fotones en la que se ve una transición del estado base g a un estado excitado f para casos degenerado y no-degenerado. Se puede notar que posterior a la excitación, el sistema regresa a su estado base al relajarse y decaer al estado intermedio r . Imagen extraída de [4]

Asimismo, es posible describir el coeficiente de absorción $\kappa^{(2)}$ correspondiente al TPA en base a la relación [5, 6]

$$\frac{dI}{dz} = -\kappa^{(1)}I - \kappa^{(2)}I^2, \quad (1.1)$$

en la que I es la intensidad del haz láser incidente en la muestra, z denota la dirección de propagación de la luz y $\kappa^{(1)}$ es el coeficiente de absorción lineal. La dependencia de $\kappa^{(2)}$ en el cuadrado de la intensidad del haz causa que el TPA sea también denominado un proceso óptico no-lineal.

Esta no-linealidad causa que la transición dada por un proceso de absorción de dos fotones presente reglas de selección diferentes a aquellas vistas en las más comunes transiciones por un fotón, o también llamadas transiciones dipolares eléctricas. Lo anterior permite que la transición de dos fotones sea una herramienta viable para estudiar la estructura atómica, y por ende energética, de un átomo o sistema al permitir transiciones “prohibidas” entre niveles dados.

En este sentido, es posible derivar una expresión para la sección eficaz de absorción para procesos de TPA al emplear acercamientos semiclásicos, tales que materia o partículas con comportamientos cuánticos interactúen con campos electromagnéticos clásicos (ergo, no cuantizados). Esto permite diferentes acercamientos, entre los que se encuentran el uso de susceptibilidades no-lineales a tercer orden o también teoría de perturbaciones dependientes del tiempo a segundo orden.

En base a lo anteriormente expuesto, cabe a resaltar las mediciones realizadas para el TPA en Cesio [7] y los modelamientos teóricos realizados para el cálculo de secciones eficaces de absorción en Rubidio [8]. En este proyecto en particular, se busca estudiar el TPA en el Cesio debido a que por su naturaleza como un metal alcalino, posee un solo electrón en su última capa de valencia, lo que facilita su análisis ya que podemos basar ciertas interacciones del átomo en torno a esto.

1.1. Estado del arte

El TPA fue formulado por primera vez por Maria Goppert-Mayer en 1930 en su tesis de doctorado. Goppert-Mayer empleó la teoría de dispersión de Dirac para calcular la probabilidad de que ocurriese un proceso en el que se emitieran dos fotones por un átomo en un estado de excitación. En base a esto, analizó el proceso inverso bajo el cual el átomo podría absorber dos fotones [9]. De igual manera, la conservación de paridad de los estados inicial y final establecían que ambos fotones debían ser absorbidos “simultáneamente” [10]. Aun así, se requirieron 30 años para que este fenómeno se pudiese verificar experimentalmente por medio de la excitación con láser de cristales de $\text{CaF}_2:\text{Eu}^{2+}$ [11]. Posteriormente, se estudió este fenómeno en el vapor de Cesio por primera vez en 1962 al analizar la transición $6S_{1/2} \rightarrow 9D_{3/2}$ [12].

Siendo así, la absorción de dos fotones ha sido un proceso altamente estudiado debido a su vasto rango de aplicaciones tales como la microscopia de excitación de dos fotones [13-15] y almacenamiento óptico [16, 17], entre otros. De igual manera, se han hecho avances en el estudio de absorción de dos fotones en vapores de metales alcalinos debido a sus posibles usos militares [18] y en la física atómica [19, 20]. Por eso, en este trabajo se busca hallar una expresión

para la sección eficaz de TPA debido las posibles aplicaciones que se podrían emplear con este fenómeno en el grupo de Óptica Cuántica de la Universidad de los Andes.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Estudiar el proceso de absorción de dos fotones en átomos de Cs.

1.2.2. Objetivos específicos

- Estudiar la estructura atómica de los átomos de Cesio, incluyendo la estructura fina y estructura hiperfina respectivamente.
- Estudiar el proceso de interacción luz-materia. En particular, el proceso de absorción de un fotón.
- Realizar cálculos para el proceso de absorción de un fotón en átomos de Cesio, utilizando teoría de perturbaciones.
- Aplicar teoría de perturbaciones de segundo orden para entender la absorción de dos fotones.
- Realizar cálculos para el proceso de absorción de dos fotones en átomos de Cesio.

Capítulo II

Marco Teórico

2.1. Estructura Fina e Hiperfina

Considere un electrón en un átomo hidrogenoide, con un Hamiltoniano base

$$H = H_0 = T + V, \quad (2.1)$$

donde T y V son términos referentes a la energía cinética y potencial del electrón. De manera que, tenemos que solo hay un electrón en la última capa de valencia [21]. Cada electrón en su orbita presenta un momento angular intrínseco, denominado “espín”, que es representado por el factor s (con número cuántico s) al igual que un momento angular orbital l (con número cuántico angular l). Ahora, los átomos alcalinos presenta subcapas llenas, salvo por la última, estas subcapas no contribuyen al momento angular total del átomo y, por ende, solo es necesario considerar el único electrón de valencia. De manera que, ya que la única contribución al momento angular total viene de un electrón de valencia, el momento angular orbital total es $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i = l$ y momento angular por el espín total es $\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{s}_i = s$ [22]. Así que, se puede establecer un momento angular total para el electrón denominado \mathbf{J} , tal que $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. En tal caso, se tiene que J tiene un rango de valores $|L - S| \leq J \leq L + S$.

En los átomos alcalinos resulta necesario estudiar el acoplamiento entre los factores \mathbf{L} y \mathbf{S} ya que este acoplamiento espín-órbita causa alteraciones en los momentos \mathbf{L} y \mathbf{S} , tal que sus proyecciones L_z y S_z no se mantengan constantes. Por tanto, se tiene que este acoplamiento LS trae desdoblamientos de energía que se pueden escribir en base al Hamiltoniano

$$H_{SO} = \beta_{LS} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}, \quad (2.2)$$

donde el factor β_{LS} es una constante de interacción espín-órbita vinculada a cada electrón [23]. Y esto llevaría a un Hamiltoniano de la forma

$$H = H_0 + H_{SO}. \quad (2.3)$$

El valor esperado del Hamiltoniano H_{SO} da como resultado un valor para el cambio en la energía de un estado debido al acoplamiento LS dado por

$$E_{SO} = \beta_{LS} \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \rangle, \quad (2.4)$$

en donde es necesario obtener el valor esperado del operador

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{S})}{2}, \quad (2.5)$$

para cada término ^{2S+1}L , en donde cada término tiene $(2S + 1)(2L + 1)$ estados degenerados. Por lo tanto, como resultado de este proceso se obtiene que

$$E_{SO} = \frac{\beta_{LS}}{2} (J(J + 1) - L(L + 1) - S(S + 1)). \quad (2.6)$$

Finalmente, al considerar que el núcleo posee un momento magnético μ_I de la forma

$$\mu_I = g_I \mu_N \mathbf{I}, \quad (2.7)$$

en la que g_I es un factor-g, μ_N es un magnetón nuclear, tal que $\mu_N \approx \mu_B/1836$ y \mathbf{I} es el momento angular del núcleo del átomo. Se puede considerar el Hamiltoniano de la estructura hiperfina dado por la interacción del momento magnético μ_I y la densidad de flujo magnético creada por los electrones atómicos \mathbf{B}_e como

$$H_{HFS} = -\mu_I \cdot \mathbf{B}_e. \quad (2.8)$$

tal que [24]

$$\mathbf{B}_e = -\frac{2}{3} \mu_0 g_s \mu_B |\psi(0)|^2 \mathbf{s}, \quad (2.9)$$

y tomando este término en la ecuación (2.8) se llega a que

$$H_{HFS} = \mu_I \cdot \frac{2}{3} \mu_0 g_s \mu_B |\psi(0)|^2 \mathbf{s} = A \mathbf{I} \cdot \mathbf{s}, \quad (2.10)$$

en la que A es una constante denominada constante de dipolo magnético [25] de la forma

$$A = \frac{2}{3} \mu_0 g_s \mu_B g_I \mu_N |\psi(0)|^2. \quad (2.11)$$

Entonces, de manera similar al caso de la estructura fina, se puede definir un término de momento angular total del átomo $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$, donde se puede proyectar este valor para obtener el número cuántico m_F . Adicionalmente, una vez más se puede obtener el valor esperado del Hamiltoniano H_{HFS} para obtener los valores del desdoblamiento de energía

$$E_{HFS} = \frac{A}{2} (F(F + 1) - I(I + 1) - J(J + 1)). \quad (2.12)$$

Y así, el Hamiltoniano de un átomo alcalino con el momento angular total diferente de cero es

$$H = H_0 + H_{SO} + H_{HFS}. \quad (2.13)$$

Por lo que aprovechando la ecuación $E = h\nu$ es posible obtener las frecuencias entre los niveles. Una vez construidos los niveles, es posible evidenciar de manera directa las transiciones entre estos, comenzando por aquellas que involucran la absorción de un fotón. Estas se pue-

den entender al modelar la interacción entre un haz de luz y átomos de Cesio, en los que la interacción se evalúa empleando teoría de perturbaciones.

2.2. Teoría de Perturbaciones

Se puede empezar esta sección estableciendo la imagen de Schrödinger en la que la evolución temporal de un sistema está contenida en el vector de estado ($|\psi(t)\rangle$) y se obtiene de la ecuación de Schrödinger [26].

Por otro lado, la imagen de interacción es aquella en la que tanto los vectores de estado como los operadores evolucionan en el tiempo, donde esta evolución está dada por la perturbación.

El operador de evolución temporal, el cual da el estado de un sistema cuántico en un instante t al tener el estado en un tiempo previo t_0 , es [26]

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad (2.14)$$

tal que este es un operador unitario y, por lo tanto,

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1}. \quad (2.15)$$

Si $H(t)$ es el Hamiltoniano dependiente del tiempo del sistema, $\hat{U}(t, t_0)$ obedece a la ecuación diferencial

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = H(t) \hat{U}(t, t_0), \quad (2.16)$$

con la condición inicial de que $\hat{U}(t_0, t_0) = \mathbb{1}$. Así que, la ecuación integral equivalente a la ecuación diferencial junto con su condición inicial es

$$\hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') \hat{U}(t', t_0), \quad (2.17)$$

donde $\hat{U}(t, t_0)$ termina siendo

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}. \quad (2.18)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede describir la amplitud de probabilidad $A_{fi}(t_f, t_i)$ para el sistema, iniciando del estado inicial $|\psi_i\rangle$ en el instante t_i , de ser encontrado en el estado $|\psi_f\rangle$ para un tiempo t_f como

$$A_{fi}(t_f, t_i) = \langle \psi_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \psi_i \rangle. \quad (2.19)$$

Ahora, suponiendo que el átomo está interactuando con una fuente de luz láser tal que el Hamiltoniano total $H = H_0 + H_I$, donde H_0 es el Hamiltoniano no perturbado del sistema y H_I es el Hamiltoniano de interacción, se tiene que los operadores de evolución \hat{U}_0 y \hat{U} asociados a los Hamiltonianos H_0 y H , respectivamente, son

$$\hat{U}_0(t, t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar}, \quad (2.20)$$

y

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}. \quad (2.21)$$

Así que se pueden relacionar estos operadores por medio de las relaciones integrales [26]

$$\hat{U}(t, t_0) = U_0(t, t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{U}_0(t, t') H_I \hat{U}(t', t_0), \quad (2.22)$$

y

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}_0(t, t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{U}(t, t') H_I \hat{U}_0(t', t_0). \quad (2.23)$$

Para demostrar lo anterior, podemos empezar multiplicando cada lado de la ecuación (2.22) por $i\hbar$ para luego derivarla

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) &= i\hbar \frac{d}{dt} \left[\hat{U}_0(t, t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{U}_0(t, t') H_I \hat{U}(t', t_0) \right] \\ &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(\hat{U}_0(t, t_0) \right) + \frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t dt' \hat{U}_0(t, t') H_I \hat{U}(t', t_0) \right), \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde al tener en cuenta la ecuación (2.20)

$$i\hbar \frac{d}{dt} \left(\hat{U}_0(t, t_0) \right) = i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \right) = i\hbar \left(\frac{-ie^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} H_0}{\hbar} \right) = H_0 \hat{U}_0(t, t_0). \quad (2.25)$$

Ahora, para derivar el segundo término de la ecuación (2.24), podemos usar la fórmula de Leibniz [27]

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f[h(\alpha), \alpha] \frac{dh(\alpha)}{d\alpha} - f[g(\alpha), \alpha] \frac{dg(\alpha)}{d\alpha}, \quad (2.26)$$

donde en este caso, $\alpha = t$ y $g(\alpha) = t_0$ es una constante, lo que significa que $dt_0/dt = 0$. Por lo tanto, empleando este resultado se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t dt' \hat{U}_0(t, t') H_I \hat{U}(t', t_0) \right) &= \hat{U}_0(t, t) H_I \hat{U}(t, t_0) + \int_{t_0}^t dt' \frac{\partial \hat{U}_0(t, t')}{\partial t} H_I \hat{U}(t', t_0) \\ &= \hat{U}_0(t, t) H_I \hat{U}(t, t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_0 \hat{U}_0(t, t') H_I \hat{U}(t', t_0). \end{aligned}$$

Lo anterior lleva a que

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = H_0 \hat{U}_0(t, t_0) + \hat{U}_0(t, t) H_I \hat{U}(t, t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_0 \hat{U}_0(t, t') H_I \hat{U}(t', t_0), \quad (2.27)$$

en la que, teniendo en cuenta que $\hat{U}_0(t, t) = \mathbb{1}$ y la ecuación (2.22)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) &= H_I \hat{U}(t, t_0) + H_0 \left[\hat{U}_0(t, t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{U}_0(t, t') H_I \hat{U}(t', t_0) \right] \\ &= [H_I + H_0] \hat{U}(t, t_0) = H \hat{U}(t, t_0). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Por lo que se concluye que el operador de la ecuación (2.22) cumple la relación (2.16) con el Hamiltoniano total y, ya que $\hat{U}(t_0, t_0) = \mathbb{1}$, el operador es un operador de evolución temporal. Y por lo tanto, es posible insertar el término para $\hat{U}(t, t_0)$ en la integral correspondiente a la ecuación (2.22) de forma iterativa, tal que se puede obtener una expansión para el operador en términos de potencias del Hamiltoniano H_I [26]

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= \hat{U}_0(t, t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{U}_0(t, t') H_I \hat{U}(t', t_0) + \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \hat{U}_0(t, t') \\ &\quad H_I \hat{U}_0(t', t'') H_I \hat{U}_0(t'', t_0) + \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

En insertando la ecuación (2.23) en la integral de la ecuación (2.22), reemplazando $t \rightarrow t'$ y $t' \rightarrow t''$, tal que

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= \hat{U}_0(t, t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{U}_0(t, t') H_I \hat{U}(t', t_0) + \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \hat{U}_0(t, t') \\ &\quad H_I \hat{U}(t', t'') H_I \hat{U}_0(t'', t_0). \end{aligned} \quad (2.30)$$

En fin, ya que se está trabajando con perturbaciones, tomando el vector de estado de Schrödinger $|\psi(t)\rangle$ en la imagen de interacción (donde se utilizará la notación $\bar{\psi}$ para denotar factores correspondientes a esta imagen) tal que

$$|\bar{\psi}(t)\rangle = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) |\psi(t)\rangle = \exp[i(t - t_0)H_0/\hbar] |\psi(t)\rangle, \quad (2.31)$$

donde $|\bar{\psi}(t)\rangle$ obedece la ecuación de evolución de tiempo

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\bar{\psi}(t)\rangle = \bar{H}_I(t) |\bar{\psi}(t)\rangle, \quad (2.32)$$

y $\bar{H}_I(t)$ se define como

$$\bar{H}_I(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) H_I \hat{U}_0(t, t_0). \quad (2.33)$$

Así que tomar el operador $\bar{U}(t, t_0)$ en la imagen de interacción da la evolución de $|\bar{\psi}(t)\rangle$

$$|\bar{\psi}(t)\rangle = \bar{U}(t, t_0) |\bar{\psi}(t_0)\rangle. \quad (2.34)$$

Y así es posible relacionar los operadores desde ambas imágenes como

$$\bar{U}(t, t_0) = U_0^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) = \exp[i(t - t_0)H_0/\hbar] \hat{U}(t, t_0). \quad (2.35)$$

Por lo que, insertar la ecuación (2.34) en la ecuación (2.32) da

$$i\hbar \frac{d}{dt} \bar{U}(t, t_0) = \bar{H}_I(t) \bar{U}(t, t_0), \quad (2.36)$$

tal que se puede realizar una expansión

$$\bar{U}(t, t_0) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \bar{H}_I(t') + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \bar{H}_I(t') \bar{H}_I(t'') + \dots \quad (2.37)$$

Siendo así, se tiene que el segundo término en la ecuación (2.37) es resultado de una expansión a primer orden y por ende, denota transiciones de un fotón. Por otro lado, el tercer término es producto de una expansión a segundo orden, así que describe transiciones de dos fotones. Asimismo, el tercer término posee 2 operadores H_I . Esto se debe a que el primer término Hamiltoniano describe una transición del estado inicial $|\psi_i\rangle$ a un estado intermedio $|\psi_m\rangle$. Este estado intermedio puede ser un estado real así como puede ser un estado virtual que se puede representar cómo una combinación lineal de las funciones de onda de todos los niveles reales $|\psi_n\rangle$ que se combinan con $|\psi_i\rangle$ y $|\psi_f\rangle$ por medio de transiciones de un fotón [28] tal y como se ve en la Figura 2.1. Lo anterior es resultado del hecho de que los dos fotones no interactuarán con el sistema simultáneamente, ya que habrá una diferencia de tiempo en la llegada de ambos. Siendo así, el primer fotón causaría la transición descrita anteriormente, tal que este estado intermedio posea una energía asociada a la energía del estado inicial y la energía del fotón. En esta medida, debido al principio de incertidumbre, esta energía posee un tiempo de vida característico τ_c [4] en el que si el átomo interactúa con un segundo fotón, la energía de este le permita llegar al estado final $|\psi_f\rangle$. Estas variaciones de energía en la estructura del átomo permiten introducir la noción de que ambos fotones no sean necesariamente iguales, en el sentido en que posean la misma frecuencia, en lo que se conoce como un “caso no-degenerado”. En aquellos casos en los que ambos fotones si poseen la misma frecuencia, esto se llama un “caso degenerado”.

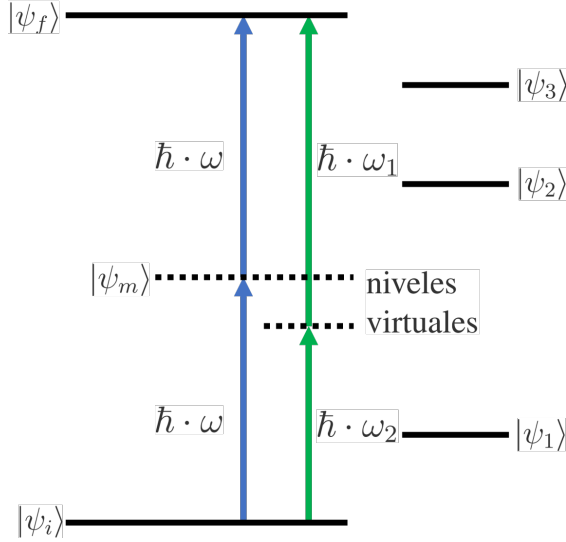


Figura 2.1: Esquema de una transición por absorción de dos fotones para caso degenerado (azul) y no-degenerado (verde) en la que $|\psi_i\rangle$ señala el estado inicial, $|\psi_f\rangle$ el estado final, $|\psi_n\rangle$ son estados intermedios reales y $|\psi_m\rangle$ es un estado virtual. Ya que el caso denotado en verde es no-degenerado, esto indica que $\omega_1 \neq \omega_2$. Imagen adaptada de [29].

Siguiendo con el desarrollo, el segundo Hamiltoniano describe una transición del estado $|\psi_m\rangle$ al estado $|\psi_f\rangle$. Por tanto, insertando la ecuación (2.37) entre el bra $\langle\psi_f|$ y el ket $|\psi_i\rangle$ y teniendo en cuenta que los estados son ortogonales y, por lo tanto, $\langle\psi_f|\psi_i\rangle = \delta_{f,i}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \langle\psi_f|\bar{U}(\Delta t, 0)|\psi_i\rangle &= \delta_{f,i}e^{-i(E_i-E_f)t/\hbar} + \left(\frac{1}{i\hbar}\right) \int_0^{\Delta t} \langle\psi_f|\bar{H}_I|\psi_i\rangle e^{iE_f t} e^{-iE_i t} dt \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \sum_{\psi_m} \int_0^{\Delta t} \int_0^{t'} \langle\psi_f|\bar{H}_I|\psi_m\rangle \langle\psi_m|\bar{H}_I|\psi_i\rangle e^{iE_f t'} e^{-iE_m(t'-t'')/\hbar} e^{-iE_i t''/\hbar} dt'' dt'. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Y ahora, se tiene que para eigenestados de H_0 $|\psi_i\rangle$ y $|\psi_f\rangle$

$$\langle\psi_f|U(t, t_0)|\psi_i\rangle = \langle\psi_f|\exp[-i(t-t_0)H_0/\hbar]\bar{U}(t, t_0)|\psi_i\rangle = e^{-iE_f(t-t_0)/\hbar}\langle\psi_f|\bar{U}(t, t_0)|\psi_i\rangle.$$

Siendo así, podemos denotar estos elementos matriciales en base a una interacción $H_I = \epsilon V_I$, donde ϵ es una constante, para transiciones entre niveles f y m de una forma más abreviada como

$$\langle\psi_f|H_I|\psi_m\rangle = \epsilon\langle\psi_f|V_I|\psi_m\rangle = V_{fm}, \quad (2.39)$$

donde tenemos que los elementos matriciales se rigen por reglas de selección que, por ejemplo, en el caso de transiciones dipolares eléctricas se resumen en la Tabla 2.1 en la que se emplea el símbolo \leftrightarrow para denotar una transición prohibida [23]

$\Delta J = 0, \pm 1$	$J = 0 \leftrightarrow J' = 0$
$\Delta M_J = 0, \pm 1$	$M_J = 0 \leftrightarrow M_{J'} = 0$ si $\Delta J = 0$
$\Delta L = 0, \pm 1$	$L = 0 \leftrightarrow L' = 0$ $\Delta L = \pm 1$ para salto de un electrón
$\Delta S = 0$	

Cuadro 2.1: Reglas de transición para transiciones eléctricas dipolares (E1)

Estas reglas de selección explican las transiciones en la Figura 2.2, la cual explica todas las transiciones dipolares eléctricas presentes en el átomo de Cesio. Particularmente, el enfoque de este trabajo se encuentra en la transición de dos fotones presente entre los estados $6S_{1/2}$ y $8S_{1/2}$, mediados por los estados $6P_{1/2}$ y $6P_{3/2}$

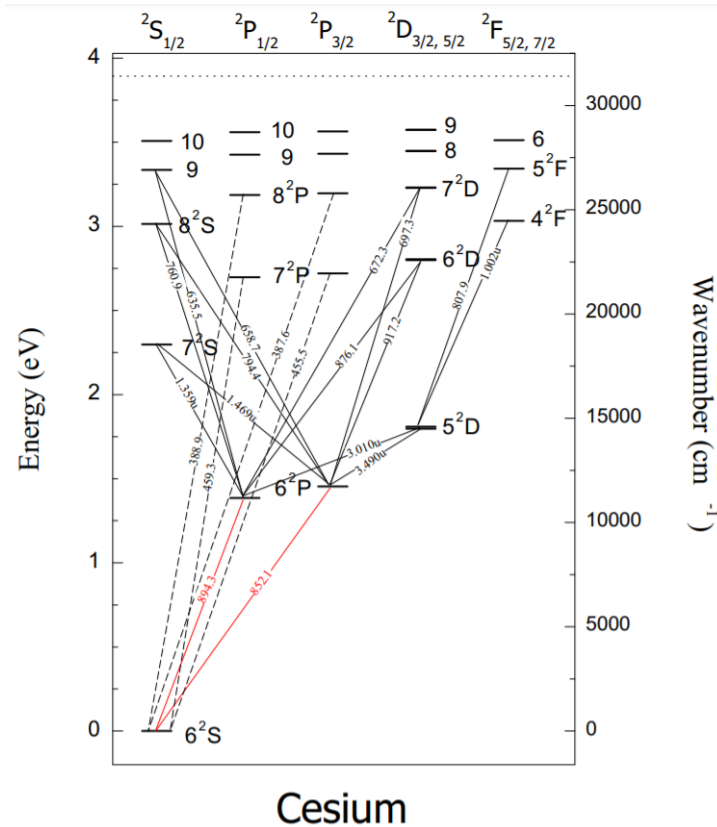


Figura 2.2: Esquema de las transiciones dipolares eléctricas permitidas para los diferentes niveles de energía del Cesio. Transiciones del estado base a niveles superiores están denotadas por líneas punteadas, salvo por los casos de transiciones hacia los dos estados superiores de menor energía, que están marcadas de color rojo. Transiciones de estados superiores de energía presentan líneas normales. Imagen modificada de [30].

Sin embargo, estas reglas de selección cambian en el caso de transiciones de dos fotones que se pueden extrapolar en base a lo que conocemos para las transiciones dipolares tal y como se resume en la Tabla 2.2

$\Delta J = 0, \pm 1, \pm 2$	$J = 0 \leftrightarrow J' = 0, 1 \quad J = 1/2 \leftrightarrow J' = 1/2$
$\Delta M_J = 0, \pm 1, \pm 2$	
$\Delta L = 0, \pm 1, \pm 2$	$L = 0 \leftrightarrow L' = 0, 1$ $\Delta L = \pm 1$ para salto de un electrón
$\Delta S = 0$	

Cuadro 2.2: Reglas de transición para transiciones por dos fotones

Capítulo III

Desarrollo del trabajo

3.1. Absorción de un fotón

Para describir la interacción de un sistema de dos niveles con un campo de radiación se requiere emplear teoría de perturbaciones dependiente del tiempo (TPDT) en las que la naturaleza del proceso define factores como el orden en la que las transiciones de un fotón emplean TPDT de primer orden y las transiciones de dos fotones requieren TPDT de segundo orden. Siendo así, se puede empezar por transiciones de un fotón, tal y como se ilustra en la Figura 3.1

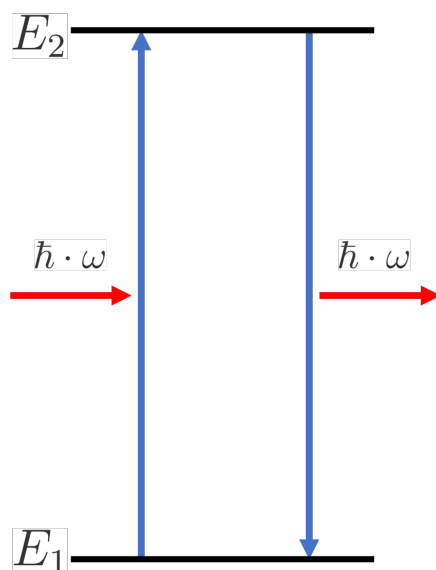


Figura 3.1: Esquema de una transición dipolar eléctrica en la que se denotan el caso de absorción y emisión respecto a los niveles E_1 y E_2 tal que $E_2 > E_1$. En la imagen, ω refleja la frecuencia del fotón absorbido o emitido en ambos procesos. Imagen adaptada de [29].

En este caso, para una transición de un fotón entre los niveles E_1 y E_2 , donde E_1 denota la energía del nivel inicial y E_2 la energía del nivel final, se tiene que la ecuación de onda para el sistema sería

$$|\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle = c_1(t)|\psi_1(\mathbf{r})\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2(t)|\psi_2(\mathbf{r})\rangle e^{-iE_2 t/\hbar}. \quad (3.1)$$

Por lo que, estableciendo el Hamiltoniano de interacción como resultado de un campo eléctrico

oscilante como $H_1 = e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$ [23], lo cual es la energía de un dipolo eléctrico, tal que $H = H_0 + H_I$ e insertando la ecuación de onda en la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H|\Psi\rangle \quad (3.2)$$

y simplificando la notación omitiendo las dependencias de variables, da como resultado

$$\begin{aligned} & c_1 (H_0|\psi_1\rangle) e^{-iE_1t/\hbar} + c_2 (H_0|\psi_2\rangle) e^{-iE_2t/\hbar} + c_1 (H_I|\psi_1\rangle) e^{-iE_1t/\hbar} + c_2 (H_I|\psi_2\rangle) e^{-iE_2t/\hbar} \\ = & i\hbar \left[\dot{c}_1 |\psi_1\rangle e^{-iE_1t/\hbar} + \dot{c}_2 |\psi_2\rangle e^{-iE_2t/\hbar} + c_1 |\psi_1\rangle \left(-\frac{iE_1}{\hbar} \right) e^{-iE_1t/\hbar} + c_2 |\psi_2\rangle \left(-\frac{iE_2}{\hbar} \right) e^{-iE_2t/\hbar} \right], \end{aligned}$$

donde los primeros dos términos en la izquierda de la igualdad cancelan los últimos dos términos de la derecha

$$c_1 (H_I|\psi_1\rangle) e^{-iE_1t/\hbar} + c_2 (H_I|\psi_2\rangle) e^{-iE_2t/\hbar} = i\hbar \left[\dot{c}_1 |\psi_1\rangle e^{-iE_1t/\hbar} + \dot{c}_2 |\psi_2\rangle e^{-iE_2t/\hbar} \right], \quad (3.3)$$

y para obtener el término \dot{c}_1 , tomando el producto interno con $\langle\psi_1|$

$$c_1 \langle\psi_1|H_I|\psi_1\rangle e^{-iE_1t/\hbar} + c_2 \langle\psi_1|H_I|\psi_2\rangle e^{-iE_2t/\hbar} = i\hbar \dot{c}_1 e^{-iE_1t/\hbar}. \quad (3.4)$$

Ya que los elementos diagonales de la matriz H_I ($\langle\psi_1|H_I|\psi_1\rangle$) desaparecen debido a que carecen de sentido físico al describir transiciones de un estado a si mismo se tiene que despejando el coeficiente c_1

$$i\dot{c}_1 = \frac{\langle\psi_1|H_I|\psi_2\rangle}{\hbar} e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar} c_2 = \frac{\langle\psi_1|e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0|\psi_2\rangle}{\hbar} e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar} \cos(\omega t) c_2, \quad (3.5)$$

y tomando en cuenta que

$$\omega_0 = \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \quad (3.6)$$

e introduciendo el término

$$\Omega = \frac{\langle\psi_1|e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0|\psi_2\rangle}{\hbar} = \frac{e}{\hbar} \int \psi_1^*(r) \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0 \psi_2(r) d^3\mathbf{r}, \quad (3.7)$$

se puede reescribir la ecuación (3.5) como

$$i\dot{c}_1 = \Omega e^{-i\omega_0 t/\hbar} \cos(\omega t) c_2, \quad (3.8)$$

y de manera similar se tiene que para el coeficiente c_2

$$i\dot{c}_2 = \Omega^* e^{i\omega_0 t/\hbar} \cos(\omega t) c_1. \quad (3.9)$$

Ahora, teniendo en cuenta que las condiciones iniciales de las poblaciones establecen que

$c_1(0) = 1$ y $c_2(0) = 0$ se tiene que, empleando la fórmula

$$\cos(x) = \text{Re} (e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad (3.10)$$

e integrando las ecuaciones (3.5) y (3.9) se obtiene

$$c_1(t) = 1, \quad (3.11)$$

y

$$c_2(t) = \frac{\Omega^*}{2} \left[\frac{1 - e^{i(\omega_0 + \omega)t}}{\omega_0 + \omega} + \frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega)t}}{\omega_0 - \omega} \right]. \quad (3.12)$$

Siendo así, se tiene que se puede asumir que la radiación posee una frecuencia ω que se acerca al valor de resonancia de la transición ω_0 , tal que $|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0$. Esto indica que $\omega_0 + \omega \sim 2\omega_0$ y, por lo tanto, es posible ignorar el primer término de la ecuación. Esto se conoce como la aproximación de onda rotante [23] y, por lo tanto, la ecuación anterior es

$$c_2(t) = \frac{\Omega^*}{2} \frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega)t}}{\omega_0 - \omega}. \quad (3.13)$$

Así que sacando el módulo de esta expresión

$$|c_2(t)|^2 = \left| \frac{\Omega}{2} \frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega)t}}{\omega_0 - \omega} \right|^2, \quad (3.14)$$

y ya que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega)t}}{2} \right|^2 &= \frac{(1 - \cos((\omega_0 - \omega)t))^2 + \sin^2((\omega_0 - \omega)t)}{4} \\ &= \frac{2 - 2 \cos((\omega_0 - \omega)t)}{4} \\ &= \sin^2 \left(\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

entonces

$$|c_2(t)|^2 = \left| \Omega \frac{\sin \left(\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \right)}{\omega_0 - \omega} \right|^2. \quad (3.16)$$

Ahora, estableciendo

$$\mathbf{D}_{12} = \langle \psi_1 | \mathbf{r} | \psi_2 \rangle = \int \psi_1^* \mathbf{r} \psi_2 d^3 \mathbf{r}, \quad (3.17)$$

teniendo el momento de dipolo eléctrico inducido en el átomo por la radiación, asumiendo que el campo esté a lo largo de \hat{e}_x se llega a que

$$-eD_x(t) = - \int \Psi^\dagger(t) e x \Psi(t) d^3 \mathbf{r} \quad (3.18)$$

lo que implica que, teniendo en cuenta que $E_f/\hbar = \omega_n$

$$\begin{aligned} D_x(t) &= \int \left(c_1 e^{-\omega_1 t} \psi_1 + c_2 e^{-\omega_2 t} \psi_2 \right)^* x \left(c_1 e^{-\omega_1 t} \psi_1 + c_2 e^{-\omega_2 t} \psi_2 \right) d^3 \mathbf{r} \quad (3.19) \\ &= c_2^* c_1 \langle 2|x|1 \rangle e^{i\omega_0 t} + c_1^* c_2 \langle 1|x|2 \rangle e^{-i\omega_0 t}, \end{aligned}$$

por lo que este resulta un momento adecuado para introducir la matriz de densidad de estados [23]

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & |c_2|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

En base a estas densidades, es posible definir las ecuaciones ópticas de Bloch [25, 31] como

$$\dot{\rho}_{22} = \frac{i\Omega}{2} (\tilde{\rho}_{21} - \tilde{\rho}_{12}) + \Gamma \rho_{11} \quad (3.21)$$

$$\dot{\rho}_{11} = -\frac{i\Omega}{2} (\tilde{\rho}_{21} - \tilde{\rho}_{12}) - \Gamma \rho_{11} \quad (3.22)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{21} = -(\gamma + i\delta) \tilde{\rho}_{21} - \frac{i\Omega}{2} (\rho_{11} - \rho_{22}), \quad (3.23)$$

donde $\delta = \omega - \omega_0$, $\Gamma = 1/\tau$ es la tasa de decaimiento natural del estado excitado, $\gamma = \Gamma/2$ es la tasa de decaimiento “transversal” y $\tilde{\rho}_{21} = \rho_{21} \exp(-i\delta t)$ es una “coherencia que varía lentamente” tal que $\tilde{\rho}_{21} = \tilde{\rho}_{12}^*$. En el caso de amortiguación radiativa, se tiene que la población del estado excitado llega a la solución de estado estable

$$\rho_{22} = \frac{1 - \eta}{2} = \frac{\Omega^2/4}{\delta^2 + \Omega^2/2 + \Gamma^2/4}, \quad (3.24)$$

donde η es

$$\eta = \frac{\delta^2 + \Gamma^2/4}{\delta^2 + \Omega^2/2 + \Gamma^2/4}. \quad (3.25)$$

Ahora, para hallar la sección eficaz de absorción de un fotón $\sigma^{(1)}$ se puede empezar por un caso simple en el que un haz de luz atraviesa un bloque de N átomos por unidad de volumen con grosor Δz y con $N\Delta z$ átomos por unidad de área, como se ve en la Figura 3.2.

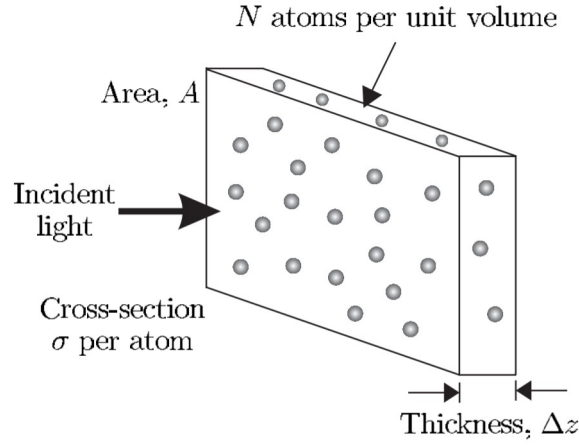


Figura 3.2: Esquema de absorción de un haz de luz por parte de un bloque. Imagen extraída de [23]

En tal caso, la probabilidad de absorción estará dada por la fracción de intensidad absorbida $\Delta I/I = -N\sigma^{(1)}\Delta z$, tal al describir la atenuación de la intensidad en base a la profundidad de penetración se tiene que

$$\frac{dI}{dz} = -\kappa^{(1)}(\omega)I = -N\sigma^{(1)}(\omega)I, \quad (3.26)$$

donde $\kappa^{(1)}(\omega)$ es el coeficiente de absorción a la frecuencia angular ω de los fotones [23]. Integrando la ecuación anterior se obtiene

$$I(\omega, z) = I(\omega, 0)e^{-\kappa(\omega)z}. \quad (3.27)$$

Sin embargo, modificando ligeramente el ejercicio, tal que la intensidad del haz sea considerablemente alta, se modificaría la ecuación (3.26) para incluir los efectos que se tendrían en las densidades poblacionales como

$$\frac{dI}{dz} = -\kappa(\omega)I(\omega) = -(N_1 - N_2)\sigma^{(1)}(\omega)I(\omega). \quad (3.28)$$

Siendo así, la conservación de energía por unidad de volumen del material absorbente requiere que [23]

$$(N_1 - N_2)\sigma^{(1)}(\omega)I(\omega) = N_2A_{21}\hbar\omega, \quad (3.29)$$

donde A_{21} es un coeficiente de Einstein que denota la tasa de emisión espontánea del estado excitado y se representa por

$$A_{21} = \frac{g_1}{g_2} \frac{4\alpha}{3c^2} \times \omega^3 |D_{12}|^2, \quad (3.30)$$

donde α es la constante de estructura fina y g_2 y g_1 son factores de degeneración del nivel final e inicial respectivamente. Y ahora, estableciendo que

$$\rho_{22} = \frac{N_2}{N} \text{ y } \eta = \frac{N_2 - N_1}{N} \quad (3.31)$$

se puede despejar $\sigma^{(1)}(\omega)$ de la ecuación (3.29) como

$$\sigma^{(1)}(\omega) = \frac{\rho_{22}}{\eta} \frac{A_{21} \hbar \omega}{I} = \frac{\Omega^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4} \frac{A_{21} \hbar \omega}{I}, \quad (3.32)$$

donde I y Ω^2 se cancelan debido a su proporcionalidad y eventualmente se llega a que [23]

$$\sigma^{(1)}(\omega) = 3 \frac{\pi^2 c^2}{\omega_0^2} A_{21} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4} \right) = 3 \frac{\pi^2 c^2}{\omega_0^2} A_{21} g_H(\omega) \quad (3.33)$$

donde

$$g_H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (3.34)$$

es lo que se conoce como un perfil espectral de línea.

3.2. Absorción de 2 fotones

Podemos empezar por un ejemplo al reescribir el ultimo término de la ecuación (2.38) tal que [32]

$$c_n^{(2)}(t) = \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \sum_m \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' e^{i\omega_{fm}t'} V_{fm}(t') e^{i\omega_{mi}t''} V_{mi}(t''). \quad (3.35)$$

En la que, tomando la perturbación como

$$V(t) = \mathcal{V} e^{i\omega t} + \mathcal{V}^\dagger e^{-i\omega t}, \quad (3.36)$$

y enfocándonos exclusivamente en el termino referente a proceso de absorción

$$V(t) = \mathcal{V}^\dagger e^{-i\omega t}, \quad (3.37)$$

y al introducirla en la ecuación anterior se llega a que

$$\begin{aligned}
c_n^{(2)}(t) &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' e^{i\omega_{fm}t'} \left(\mathcal{V}_{fm}^\dagger e^{-i\omega t'}\right) e^{i\omega_{mi}t''} \left(\mathcal{V}_{mi}^\dagger e^{-i\omega t''}\right) \\
&= \frac{-1}{\hbar^2} \sum_m \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' e^{i\omega_{fm}t'} \left(\mathcal{V}_{fm}^\dagger e^{-i\omega t'}\right) \left(\mathcal{V}_{mi}^\dagger e^{i(\omega_{mi}-\omega)t''}\right) \\
&= \frac{-1}{\hbar^2} \sum_m \int_0^t dt' \left(\mathcal{V}_{fm}^\dagger e^{i(\omega_{fm}-\omega)t'}\right) \left[i \left(\frac{1 - e^{i(\omega_{mi}-\omega)t'}}{\omega_{mi} - \omega} \mathcal{V}_{mi}^\dagger \right) \right] \\
&= -\frac{i}{\hbar^2} \sum_m \int_0^t dt' \frac{1}{\omega_{mi} - \omega} \left(\mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger e^{it'(\omega_{fm}-\omega)} - \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger e^{it'(\omega_{mi}+\omega_{fm}-2\omega)} \right) \\
&= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_m \frac{1}{\omega_{mi} - \omega} \left(\frac{e^{it(\omega_{fm}-\omega)} - 1}{\omega_{fm} - \omega} \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger - \frac{e^{it(\omega_{mi}+\omega_{fm}-2\omega)} - 1}{\omega_{mi} + \omega_{fm} - 2\omega} \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger \right) \\
&= \frac{1}{\hbar^2} \sum_m \frac{1}{\omega_{mi} - \omega} \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger \left(\frac{e^{it(\omega_{mi}+\omega_{fm}-2\omega)} - 1}{\omega_{mi} + \omega_{fm} - 2\omega} - \frac{e^{it(\omega_{fm}-\omega)} - 1}{\omega_{fm} - \omega} \right), \tag{3.38}
\end{aligned}$$

en la cual el segundo término de la ecuación (3.38) da como resultado una oscilación rápida que no contribuye a la probabilidad de transición. Por lo tanto, es posible ignorar este factor, y por ende, se llega a la ecuación

$$c_n^{(2)}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_m \frac{1}{\omega_{mi} - \omega} \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger \left(\frac{e^{it(\omega_{mi}+\omega_{fm}-2\omega)} - 1}{\omega_{mi} + \omega_{fm} - 2\omega} \right), \tag{3.39}$$

en la que podemos reescribir las frecuencias en términos de energías por medio de la ecuación (3.6) tal que

$$\omega_{fm} + \omega_{mi} = \frac{E_f - E_m}{\hbar} + \frac{E_m - E_i}{\hbar} = \frac{E_f - E_m + E_m - E_i}{\hbar} = \frac{E_f - E_i}{\hbar} = \omega_{fi}, \tag{3.40}$$

lo cual remueve la dependencia en m del primer término de la ecuación (3.39) y permite reescribirla como

$$\begin{aligned}
c_n^{(2)}(t) &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{e^{it(\omega_{fi}-2\omega)} - 1}{\omega_{fi} - 2\omega} \sum_m \frac{1}{\omega_{mi} - \omega} \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger \\
&= \frac{e^{it(E_f - E_i - 2\hbar\omega)/\hbar} - 1}{E_f - E_i - 2\hbar\omega} \sum_m \frac{1}{E_m - E_i - \hbar\omega} \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger. \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Luego, se saca la norma al cuadrado de la expresión anterior de tal modo que

$$\begin{aligned}
|c_n^{(2)}(t)|^2 &= \left| \frac{e^{it(E_f - E_i - 2\hbar\omega)/\hbar} - 1}{E_f - E_i - 2\hbar\omega} \sum_m \frac{1}{E_m - E_i - \hbar\omega} \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger \right|^2 \\
&= \left| \frac{e^{it(E_f - E_i - 2\hbar\omega)/\hbar} - 1}{E_f - E_i - 2\hbar\omega} \right|^2 \left| \sum_m \frac{1}{E_m - E_i - \hbar\omega} \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger \right|^2 \\
&= \left(2 \sin \left(\frac{(E_f - E_i - 2\hbar\omega)t}{2\hbar} \right) \right)^2 \left| \frac{1}{E_f - E_i - 2\hbar\omega} \right|^2 \\
&\quad \left| \sum_m \frac{1}{E_m - E_i - \hbar\omega} \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger \right|^2, \tag{3.42}
\end{aligned}$$

donde la norma al cuadrado del primer término se obtuvo siguiendo el mismo procedimiento que para la ecuación (3.15). Por otro lado, se tiene que se puede definir la densidad de estados finales como el número de estados dentro del intervalo de energía $(E, E + dE)$ cómo $\rho(E)dE$ [32]. Ahora, busquemos la probabilidad total, es decir, las probabilidades de transición sumadas sobre los estados finales cuando $E_f \cong E_i + 2\hbar\omega$. Para esto, empleamos la densidad de estados de tal manera que obtengamos la expresión

$$\begin{aligned}
\sum_{n, E_f \cong E_i + 2\hbar\omega} |c_n^{(2)}(t)|^2 &= \int dE_f \rho(E_f) |c_n^{(2)}|^2 \\
&= 4 \int \sin \left(\frac{(E_f - E_i - 2\hbar\omega)t}{2\hbar} \right)^2 \left| \frac{1}{E_f - E_i - 2\hbar\omega} \right|^2 \\
&\quad \left| \sum_m \frac{1}{E_m - E_i - \hbar\omega} \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger \right|^2 \rho(E_f) dE_f, \tag{3.43}
\end{aligned}$$

en la cual podemos considerar el caso en el que $t \rightarrow \infty$ para así, tomar la identidad [32]

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\alpha x)^2}{\alpha x} = \delta(x), \tag{3.44}$$

modificándola ligeramente para que de como resultado

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{(E_f - E_i - 2\hbar\omega)t}{2\hbar} \right)^2 \frac{1}{|E_f - E_i - 2\hbar\omega|^2} = \frac{\pi t}{2\hbar} \delta(E_f - E_i - 2\hbar\omega). \tag{3.45}$$

Por lo tanto, ahora es posible sacar el promedio de la norma de la sumatoria fuera de la integral y realizar la integración con la función δ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int dE_f \rho(E_f) |c_n^{(2)}(t)|^2 = \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) \left| \sum_m \frac{1}{E_m - E_i - \hbar\omega} \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger \right|^2 \rho(E_f) t \Big|_{E_f \cong E_i + 2\hbar\omega}.$$

Una vez obtenida esta probabilidad total, podemos enfocarnos en la tasa de transición, que vendría siendo la probabilidad por unidad de tiempo. Esto implica derivar la probabilidad total

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_n |c_n^{(2)}(t)|^2 \right), \quad (3.46)$$

de manera que se pueda reescribir como

$$\begin{aligned} w_{i \rightarrow [n]} &= \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) \left| \sum_m \frac{1}{E_m - E_i - \hbar\omega} \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger \right|^2 \rho(E_f)_{E_f \cong E_i + 2\hbar\omega} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) \left| \sum_m \frac{1}{E_m - E_i - \hbar\omega} \mathcal{V}_{fm}^\dagger \mathcal{V}_{mi}^\dagger \right|^2 \delta(E_f - E_i - 2\hbar\omega), \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde $[n]$ es un grupo de estados finales con energía similar a i . El delta de la tasa indica un ensanchamiento de la línea espectral que se puede representar por medio de la Lorentziana

$$\delta(E_f - E_i - 2\hbar\omega) = \frac{1}{\hbar} \delta(\omega_{fi} - 2\omega) = \left(\frac{1}{\hbar} \right) \left(\frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega_{fi} - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \right), \quad (3.48)$$

de manera similar a la ecuación (3.34). Ahora, tenemos que para un electrón con una carga e en un campo electromagnético especificado por un potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (tal que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) y un potencial escalar $\phi(\mathbf{x})$, se puede establecer su Hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + e\phi(\mathbf{x}) - \frac{e}{m_e c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}, \quad (3.49)$$

donde al tomar el campo de una onda plana monocromática

$$\mathbf{A} = 2A_0 \hat{\varepsilon} \cos \left(\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - \omega t \right), \quad (3.50)$$

en la que $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ son la polarización y la dirección de propagación de la luz [32]. Ahora, reescribiendo la ecuación anterior en términos de exponenciales por medio de la ecuación (3.10)

$$\mathbf{A} = A_0 \hat{\varepsilon} \left(e^{i((\omega/c)\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + e^{-i((\omega/c)\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right), \quad (3.51)$$

donde, al comparar la ecuación anterior con la ecuación (3.36) podemos notar que

$$\mathcal{V}_{fi}^\dagger = -\frac{eA_0}{m_e c} \left(e^{i(\omega/c)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x})} \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{p} \right)_{fi}, \quad (3.52)$$

tal que

$$\begin{aligned} w_{i \rightarrow [n]} &= \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) \left| \left(-\frac{eA_0}{m_e c} \right)^2 \sum_m \frac{1}{E_m - E_i - \hbar\omega} \langle f | e^{i(\omega/c)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x})} \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{p} | m \rangle \right. \\ &\quad \left. \langle m | e^{i(\omega/c)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x})} \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{p} | i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i - 2\hbar\omega), \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ahora, tenemos que expandiendo el término $\exp(i(\omega/c)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}))$ en la serie

$$e^{i(\omega/c)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x})} = 1 + i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} + \dots, \quad (3.54)$$

vemos que es posible emplear la aproximación de dipolo eléctrico [32] en la que decimos que debido a que la longitud de onda del campo de radiación es mas larga que la dimensión atómica, la serie anterior se aproxima al primer término 1. De manera que

$$\langle f | e^{i(\omega/c)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x})} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{p} | i \rangle \longrightarrow \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \langle f | \mathbf{p} | i \rangle, \quad (3.55)$$

donde al tomar $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ a lo largo del eje x y $\hat{\mathbf{n}}$ está a lo largo del eje z . Por lo tanto, teniendo en cuenta que

$$[x, H_0] = \frac{i\hbar p_x}{m}, \quad (3.56)$$

entonces

$$\langle f | p_x | i \rangle = \frac{m}{i\hbar} \langle f | [x, H_0] | i \rangle = im\omega_{fi} \langle f | x | i \rangle. \quad (3.57)$$

Por ende, es posible reescribir la ecuación (3.53) como

$$\begin{aligned} w_{i \rightarrow [n]} &= \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) \left| \left(-\frac{eA_0}{m_e c} \right)^2 \frac{1}{\hbar} \sum_m \frac{i^2 m_e^2 \omega_{fm} \omega_{mi}}{\omega_{mi} - \omega} \langle f | x | m \rangle \langle m | x | i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i - 2\hbar\omega) \\ &= \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) \left(\frac{e}{c} \right)^4 \left(\frac{|A_0|^2}{\hbar} \right)^2 \left| \sum_m \frac{\omega_{fm} \omega_{mi}}{\omega_{mi} - \omega} \langle f | x | m \rangle \langle m | x | i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i - 2\hbar\omega). \end{aligned}$$

Por otro lado, empezamos a establecer el flujo de energía del campo de radiación como [32]

$$c\mathcal{U} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{c} |A_0|^2, \quad (3.58)$$

donde

$$\mathcal{U} = \frac{E_{\max}^2 + B_{\max}^2}{16\pi}, \quad (3.59)$$

representa la densidad de energía para campos definidos como

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.60)$$

Siendo así, con base a la expresión final para la tasa de transición así como el flujo de energía, se puede definir la sección eficaz de absorción de dos fotones $\sigma^{(2)}$ como

$$\begin{aligned}
\sigma^{(2)} &= \frac{\hbar\omega w_{i \rightarrow [n]}}{(c\mathcal{U})^2} = \frac{\hbar\omega \left(\frac{2\pi}{\hbar}\right) \left(\frac{e}{c}\right)^4 \left(\frac{|A_0|^2}{\hbar}\right)^2 \left| \sum_m \frac{\omega_{fm}\omega_{mi}}{\omega_{mi} - \omega} \langle f|x|m\rangle \langle m|x|i\rangle \right|^2 \frac{1}{\hbar} \delta(\omega_{fi} - 2\omega)}{\left(\frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{c} |A_0|^2\right)^2} \\
&= \frac{8\pi^3 e^4}{c^2 \hbar^3 \omega^3} \left| \sum_m \frac{\omega_{fm}\omega_{mi}}{\omega_{mi} - \omega} \langle f|x|m\rangle \langle m|x|i\rangle \right|^2 \delta(\omega_{fi} - 2\omega), \tag{3.61}
\end{aligned}$$

en la que el flujo de energía se toma al cuadrado debido a la dependencia no-lineal de la intensidad en el proceso. La presencia de electrones en la ecuación (3.61) puede representar problemas en las unidades. Por ende, la expresión se puede simplificar aun más al emplear unidades CGS, en las cuales, la unidad de carga permite agrupar varios términos con el fin de crear la constante de estructura fina $\alpha = e^2/\hbar c$, con un valor aproximado de 1/137

$$\begin{aligned}
\sigma^{(2)} &= \frac{8\pi^3}{\hbar\omega^3} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \left| \sum_m \frac{\omega_{fm}\omega_{mi}}{\omega_{mi} - \omega} \langle f|x|m\rangle \langle m|x|i\rangle \right|^2 \delta(\omega_{fi} - 2\omega) \\
&= \frac{8\pi^3 \alpha^2}{\hbar\omega^3} \left| \sum_m \frac{\omega_{fm}\omega_{mi}}{\omega_{mi} - \omega} \langle f|x|m\rangle \langle m|x|i\rangle \right|^2 \delta(\omega_{fi} - 2\omega) \\
&= \frac{8\pi^3 \alpha^2}{\hbar\omega^3} \left| \sum_m \frac{\omega_{fm}\omega_{mi}}{\omega_{mi} - \omega} \langle f|x|m\rangle \langle m|x|i\rangle \right|^2 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega_{fi} - 2\omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \tag{3.62}
\end{aligned}$$

donde $\langle f|x|m\rangle$ y $\langle m|x|i\rangle$ son momentos dipolares que se conocen y fueron mencionados anteriormente. Siendo así, a partir de las ecuaciones (3.33) y (3.62) se puede calcular la sección eficaz de absorción de un fotón y de dos fotones, respectivamente, para átomos de Cesio.

Capítulo IV

Resultados y análisis

4.1. Absorción de un fotón

En primera instancia, podemos emplear la ecuación (3.33) al analizar el proceso de 2 pasos para la transición de $6S_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$ utilizando transiciones de un fotón tal que se empiece en el nivel $6S_{1/2}$ y de este se pase a los niveles $6P_{1/2}$ ó $6P_{3/2}$ y estos a su vez pasan al nivel $8S_{1/2}$ tal y como se ve en la Figura 4.1

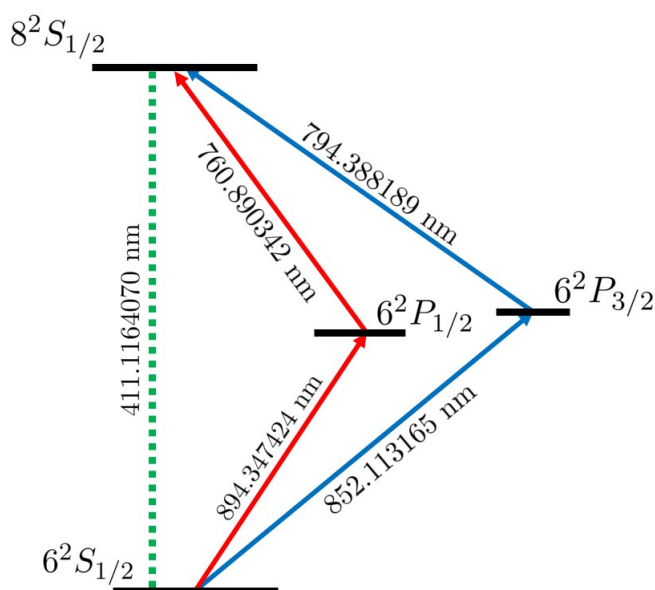


Figura 4.1: Esquema de la estructura energética del Cesio a considerar junto con las transiciones entre los niveles. Transiciones de un fotón están denotadas por flechas, mientras que transiciones dadas por absorción de dos fotones se muestran como líneas punteadas. En este caso, se tiene que los datos de longitudes de onda se obtuvieron de [33-36].

Por lo tanto, tomando el Cesio como un átomo de 2 niveles tal que $\Gamma = A_{21}$, tenemos que estas secciones de absorción se pueden dar en base a los elementos matriciales de transición dados en la Tabla 4.1

Transición	Dipolo-Eléctrico (m)	Longitud de onda (m)	Frecuencia Angular (s ⁻¹)
6S _{1/2} → 6P _{1/2}	2,4542 · 10 ⁻¹⁰	894,347424 · 10 ⁻⁹	2,10617 · 10 ¹⁵
6S _{1/2} → 6P _{3/2}	3,4707 · 10 ⁻¹⁰	852,113165 · 10 ⁻⁹	2,21057 · 10 ¹⁵
6P _{1/2} → 8S _{1/2}	5,2280 · 10 ⁻¹¹	760,890342 · 10 ⁻⁹	2,47559 · 10 ¹⁵
6P _{3/2} → 8S _{1/2}	7,3936 · 10 ⁻¹¹	794,38820 · 10 ⁻⁹	2,3712 · 10 ¹⁵

Cuadro 4.1: Elementos matriciales de dipolos eléctricos para transiciones en Cesio. Valores obtenidos de [37].

4.1.1. Transición 6S_{1/2} → 6P_{1/2}

Para $A_{21} = 2,863 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ [33]

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}(\omega) &= 3 \cdot \frac{\pi^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{\left(\frac{2\pi \cdot (3 \cdot 10^8)}{894,347424 \cdot 10^{-9}}\right)^2} \cdot (2,863 \cdot 10^{-7}) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2,863 \cdot 10^{-7}}{\left(\omega - \frac{2\pi \cdot (3 \cdot 10^8)}{894,347424 \cdot 10^{-9}}\right)^2 + \frac{(2,863 \cdot 10^{-7})^2}{4}} \right) \\ &= \frac{7,82594 \cdot 10^{-27}}{(\omega - 2,10763 \cdot 10^{15})^2 + 2,04919 \cdot 10^{-14}} \end{aligned}$$

Y tomando el término de mayor sección en la frecuencia de resonancia tal que $\omega = \omega_0$
 $\approx 3,81904 \cdot 10^{-13} \text{ m}^{-2}$

4.1.2. Transición 6S_{1/2} → 6P_{3/2}

Para $A_{21} = 3,279 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ [34]

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}(\omega) &= 3 \cdot \frac{\pi^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{\left(\frac{2\pi \cdot (3 \cdot 10^8)}{852,113165 \cdot 10^{-9}}\right)^2} \cdot (3,279 \cdot 10^{-7}) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{3,279 \cdot 10^{-7}}{\left(\omega - \frac{2\pi \cdot (3 \cdot 10^8)}{852,113165 \cdot 10^{-9}}\right)^2 + \frac{(3,279 \cdot 10^{-7})^2}{4}} \right) \\ &= \frac{9,31877 \cdot 10^{-27}}{(\omega - 2,2121 \cdot 10^{15})^2 + 2,68796 \cdot 10^{-14}} \end{aligned}$$

Y tomando el término de mayor sección en la frecuencia de resonancia tal que $\omega = \omega_0$
 $\approx 3,46686 \cdot 10^{-13} \text{ m}^{-2}$

4.1.3. Transición 6P_{1/2} → 8S_{1/2}

Asumiendo de inmediato que se toma la frecuencia de resonancia tal que la ecuación para la sección eficaz se reduzca a:

$$\sigma^{(1)}(\omega) = \frac{g_2 \lambda^2}{g_1 2\pi} \quad (4.1)$$

Siendo así, ya que la transición va desde un nivel P tal que $l = 1$ y por lo tanto $m_l = -1, 0, 1$ se llega a que:

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)}(\omega) &= \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{2\pi} \\ &= \frac{1}{3} \frac{(760,890342 \cdot 10^{-9})^2}{2\pi} \\ &\approx 3,07145 \cdot 10^{-14} \text{ m}^{-2}\end{aligned}$$

4.1.4. Transición $6P_{3/2} \longrightarrow 8S_{1/2}$

Ya que la transición va desde un nivel P tal que $l = 1$ y por lo tanto $m_l = -1, 0, 1$ se llega a que:

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)}(\omega) &= \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{2\pi} \\ &= \frac{1}{3} \frac{(794,38820 \cdot 10^{-9})^2}{2\pi} \\ &\approx 3,34784 \cdot 10^{-14} \text{ m}^{-2}\end{aligned}$$

Los datos obtenidos concuerdan en gran medida con aquellos reportados experimentalmente para la transición $6S_{1/2} \longrightarrow 6P_{3/2}$ (con valor reportado de $3,4687623065(22) \cdot 10^{-13} \text{ m}^{-2}$) [25].

4.2. Absorción de dos fotones

Una vez analizadas estas interacciones por medio de transiciones eléctricas dipolares, se puede seguir a evaluar sus interacciones por medio de transiciones de dos fotones. Tal y como se había establecido anteriormente, las transiciones de dos fotones son mediadas por denominados “estados virtuales” que son combinaciones lineales de estados reales intermedios entre las transiciones prohibidas. Ya que ahora se tiene una expresión para la sección eficaz de absorción de dos fotones (3.62), se puede estudiar la transición $6S_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$ vinculándola por medio de una absorción de dos fotones en la que se empleen los estados $6P_{1/2}$ y $6P_{3/2}$ como estados intermedios y la longitud de onda del haz láser empleado para la perturbación sea 822,5 nm (ergo, $\omega = 2,29015 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$) [38].

De igual manera, cuando se evaluó el perfil espectral de línea (3.34) en las transiciones de un fotón, se aproximó el átomo a un sistema de 2 niveles tal que el factor Γ se pudiera reemplazar por el coeficiente de Einstein A_{21} referente a la transición. En este caso, no existe un coeficiente A_{21} ya que no hay un decaimiento natural del estado $8S_{1/2}$ al estado $6S_{1/2}$. Por ende, se realizará una aproximación en la que se dirá que el factor γ es el inverso del tiempo de vida τ del estado $8S_{1/2}$ tal y como se ha reportado experimentalmente como $\tau = 7,3 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ [39].

Por lo tanto, al reemplazar los valores en la ecuación (3.62) usando la notación μ para representar los dipolos eléctricos, y teniendo en cuenta que se emplean unidades CGS, se llega a que

$$\begin{aligned}
\sigma^{(2)} &= \frac{8\pi^3 e^4}{c^2 \hbar^3 \omega^3} \left| \sum_m \frac{\omega_{fm} \omega_{mi}}{\omega_{mi} - \omega} \mu_{fm} \mu_{mi} \right|^2 \delta(\omega_{ni} - 2\omega) \\
&= \frac{8\pi^3 \alpha^2}{\hbar \omega^3} \left| \frac{\omega_{8S_{1/2}-6P_{1/2}} \omega_{6P_{1/2}-6S_{1/2}}}{\omega_{6P_{1/2}-6S_{1/2}} - \omega} \mu_{8S_{1/2}-6P_{1/2}} \mu_{6P_{1/2}-6S_{1/2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega_{8S_{1/2}-6P_{3/2}} \omega_{6P_{3/2}-6S_{1/2}}}{\omega_{6P_{3/2}-6S_{1/2}} - \omega} \mu_{8S_{1/2}-6P_{3/2}} \mu_{6P_{3/2}-6S_{1/2}} \right|^2 \frac{\tau^{-1}}{2\pi} \frac{1}{\left(\omega_{6S_{1/2}-8S_{1/2}} - 2\omega \right)^2 + \frac{(\tau^{-1})^2}{4}} \\
&= (1,04335 \cdot 10^{-21}) (9,8417 \cdot 10^{-19}) |-3,63621 + 16,9002|^2 \\
&= 1,807663609 \cdot 10^{-37} \frac{\text{cm}^2 \text{s}^3}{\text{g}} \\
&= 1,807663609 \cdot 10^{-38} \frac{\text{m}^2 \text{s}^3}{\text{kg}} \\
&= 1,807663609 \cdot 10^{-38} \frac{\text{m}^4}{\text{W}},
\end{aligned}$$

en las que se presentan las mismas unidades que en modelamientos teóricos para el metal alcalino más similar al Cesio, el Rubidio, en procesos de four-wave mixing. Sin embargo, la magnitud de la sección eficaz obtenida difiere en gran medida de aquella presentada en dichos modelamientos [8].

Sin embargo, al pasara el valor obtenido a la unidad oficial para la sección eficaz de TPA, que es GM ó también $10^{-50} \text{cm}^4 \text{s photons}^{-1}$ se tiene que

$$\sigma^{(2)} = 4,365746684 \cdot 10^{-49} \frac{\text{cm}^4 \text{s}}{\text{photons}} = 43,65746684 \text{ GM} \quad (4.2)$$

Capítulo V

Conclusiones

Se estudió el proceso de absorción de un fotón y en base a esto, se halló una ecuación que permitiese dar una medida de la sección eficaz de absorción para un fotón empleando teoría de perturbaciones dependiente del tiempo de primer orden y las ecuaciones ópticas de Bloch. Dicha ecuación fue exitosamente comparada con valores hallados en la literatura para ciertas transiciones en el Cesio.

Posteriormente, se emplearon los resultados obtenidos para el caso exclusivo de un fotón de tal manera que se pudiese extender el análisis al caso pertinente para el proyecto: absorción de dos fotones. La ecuación encontrada presenta las mismas unidades a aquellas secciones encontradas en la literatura para otros metales alcalinos como el Rubidio. No obstante, al reescribir el valor en términos de GM se tuvo que este valor se puede comparar con la cross-section reportada para ciertas moléculas orgánicas. Sin embargo, el orden de magnitud encontrado difiere en gran medida de lo razonable y emplear la ecuación para intentar repicar estos valores experimentales da resultados incoherentes con lo esperado.

En este sentido, es claro que se requiere seguir investigando este fenómeno así como los procesos matemáticos que se dieron a cabo para así hallar una mejor expresión que describa la sección eficaz del TPA. Lo anterior podría involucrar un acercamiento diferente al tener en cuenta la no-linealidad presente en la susceptibilidad eléctrica o casos de absorción no-degenerados que permitan implementar estas formulaciones en el desarrollo de procedimientos experimentales futuros.

Apéndice A

Cálculo de energía para Estructura Fina e Hiperfina

Para analizar el efecto de la estructura fina e hiperfina sobre la estructura atómica del Cesio así como el desdoblamiento de los niveles de energía causados por estos, podríamos ver la transición del Cesio en su estado $6S_{1/2}$ de $F = 3 \rightarrow F = 4$. De manera que podemos empezar calculando la función de onda de este estado. Se tiene que la función de onda se da cómo

$$|\psi_{nlm}(r, \theta, \phi)|^2 = R_{n,l}^2(r) |Y_{l,m}(\theta, \phi)|^2, \quad (\text{A.1})$$

En la que $R_{n,l}(r)$ es la función radial y $Y_{l,m}$ son armónicos esféricos. De manera que se puede empezar calculando la función de onda radial para el estado $6S_{1/2}$, tal que $n = 6$, $l = 0$ y $m = 0$. Siendo así, estableciendo la variable ρ como

$$\rho = \frac{2Zr}{na_0} = \frac{2Zr}{6a_0} = \frac{Zr}{3a_0}, \quad (\text{A.2})$$

de manera que se tenga un ajuste que varíe con n , se puede hallar la función radial R en términos de la variable ρ como

$$R_{n,l} = \rho^l \sum_{k=0}^{n-l-1} a_k \rho^k e^{-\rho/2} \implies R_{6,0} = \rho^0 \sum_{k=0}^5 a_k \rho^k e^{-\rho/2}, \quad (\text{A.3})$$

donde los coeficientes a_k se definen de manera recursiva cómo

$$a_{k+1} = \frac{k + l + 1 - n}{(k + 1)(k + 2l + 2)} a_k. \quad (\text{A.4})$$

Ya que técnicamente debería existir un término a_0 para $k = 0$, este término pasará a llamarse C para diferenciarlo del término a_0 para el radio de Bohr. Por lo tanto, se tiene que los coeficientes terminarían siendo:

- Para $k = 0$

$$a_1 = \frac{0 + 0 + 1 - 6}{(0 + 1)(0 + 0 + 2)} C = -\frac{5}{2} C. \quad (\text{A.5})$$

- Para $k = 1$

$$a_2 = \frac{1+0+1-6}{(1+1)(1+0+2)}a_1 = \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{5}{2}C\right) = \frac{5}{3}C. \quad (\text{A.6})$$

- Para $k = 2$

$$a_3 = \frac{2+0+1-6}{(2+1)(2+0+2)}a_2 = \left(-\frac{1}{4}\right) \left(\frac{5}{3}C\right) = -\frac{5}{12}C. \quad (\text{A.7})$$

- Para $k = 3$

$$a_4 = \frac{3+0+1-6}{(3+1)(3+0+2)}a_3 = \left(-\frac{1}{10}\right) \left(-\frac{5}{12}C\right) = \frac{1}{24}C. \quad (\text{A.8})$$

- Para $k = 4$

$$a_5 = \frac{4+0+1-6}{(4+1)(4+0+2)}a_4 = \left(-\frac{1}{30}\right) \left(\frac{1}{24}C\right) = -\frac{1}{720}C. \quad (\text{A.9})$$

- Para $k = 5$

$$a_6 = \frac{5+0+1-6}{(5+1)(5+0+2)}a_5 = (0) \left(-\frac{1}{720}C\right) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} R_{6,0} &= \rho^0 \sum_{k=0}^5 a_k \rho^k e^{-\rho/2} \\ &= C \rho^0 e^{-\rho/2} - \frac{5}{2} C \rho^1 e^{-\rho/2} + \frac{5}{3} C \rho^2 e^{-\rho/2} - \frac{5}{12} C \rho^3 e^{-\rho/2} + \frac{1}{24} C \rho^4 e^{-\rho/2} - \frac{1}{720} C \rho^5 e^{-\rho/2} \\ &= C \left(1 - \frac{5}{2} \rho + \frac{5}{3} \rho^2 - \frac{5}{12} \rho^3 + \frac{1}{24} \rho^4 - \frac{1}{720} \rho^5 \right) e^{-\rho/2} \\ &= C \left(1 - \frac{5}{2} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right) + \frac{5}{3} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^2 - \frac{5}{12} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^4 - \frac{1}{720} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^5 \right) e^{-Zr/6a_0}. \end{aligned}$$

Luego, se puede obtener el valor de C por medio de la condición de normalización

$$I = \int_0^{\infty} r^2 R_{6,0}^* R_{6,0} dr = 1 \quad (\text{A.11})$$

y, expandiendo esta integral

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty C^2 \left(1 - \frac{5}{2} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right) + \frac{5}{3} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^2 - \frac{5}{12} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^4 - \frac{1}{720} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^5 \right)^2 e^{-\frac{Zr}{3a_0}} r^2 dr \\
&= C^2 \int_0^\infty e^{-\frac{Zr}{3a_0}} \left[1 - 5 \left(\frac{Zr}{3a_0} \right) + \frac{115}{12} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^2 - \frac{55}{6} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^3 + \frac{89}{18} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^4 - \frac{8}{5} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^5 \right. \\
&\quad \left. + \frac{23}{72} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^6 - \frac{17}{432} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^7 + \frac{5}{1728} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^8 - \frac{1}{8640} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^9 + \frac{1}{518400} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^{10} \right] r^2 dr \\
&= C^2 \left[\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{Zr}{3a_0}} dr - \frac{5Z}{3a_0} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{Zr}{3a_0}} dr + \frac{115Z^2}{108a_0^2} \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{Zr}{3a_0}} dr - \frac{55Z^3}{162a_0^3} \int_0^\infty r^5 e^{-\frac{Zr}{3a_0}} dr \right. \\
&\quad \left. + \frac{89Z^4}{1458a_0^4} \int_0^\infty r^6 e^{-\frac{Zr}{3a_0}} dr - \frac{8Z^5}{1215a_0^5} \int_0^\infty r^7 e^{-\frac{Zr}{3a_0}} dr + \frac{23Z^6}{52488a_0^6} \int_0^\infty r^8 e^{-\frac{Zr}{3a_0}} dr \right. \\
&\quad \left. - \frac{17Z^7}{944784a_0^7} \int_0^\infty r^9 e^{-\frac{Zr}{3a_0}} dr + \frac{5Z^8}{11337408a_0^8} \int_0^\infty r^{10} e^{-\frac{Zr}{3a_0}} dr - \frac{Z^9}{170061120a_0^9} \int_0^\infty r^{11} e^{-\frac{Zr}{3a_0}} dr \right. \\
&\quad \left. + \frac{Z^{10}}{30611001600a_0^{10}} \int_0^\infty r^{12} e^{-\frac{Zr}{3a_0}} dr \right] \\
&= C^2 \left[\frac{54a_0^3}{Z^3} - \frac{810a_0^3}{Z^3} + \frac{6210a_0^3}{Z^3} - \frac{29700a_0^3}{Z^3} + \frac{96120a_0^3}{Z^3} - \frac{217728a_0^3}{Z^3} + \frac{347760a_0^3}{Z^3} - \frac{385560a_0^3}{Z^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{283500a_0^3}{Z^3} - \frac{124740a_0^3}{Z^3} + \frac{24948a_0^3}{Z^3} \right] \\
&= \frac{54a_0^3 C^2}{Z^3} = 1 \implies C^2 = \frac{Z^3}{54a_0^3} \implies C = \sqrt{\frac{Z^3}{54a_0^3}}. \tag{A.12}
\end{aligned}$$

De manera que la función radial termina siendo

$$R_{6,0} = \sqrt{\frac{Z^3}{54a_0^3}} \left(1 - \frac{5}{2} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right) + \frac{5}{3} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^2 - \frac{5}{12} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^4 - \frac{1}{720} \left(\frac{Zr}{3a_0} \right)^5 \right) e^{-\frac{Zr}{6a_0}}.$$

Y por el otro lado, la función angular es simplemente

$$Y_{l,m} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos(\theta)), \tag{A.13}$$

donde $P_{l,m}$ son los polinomios asociados de Legendre [40]

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^m P_l(x), \tag{A.14}$$

tal que

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{(0+1)(0-0)!}{4\pi(0+0)!}} e^0 P_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad (\text{A.15})$$

y esto lleva a que la función de onda a utilizar sea

$$|\psi_{600}(0,0,0)|^2 = R_{6,0}^2(0)|Y_{0,0}(0,0)|^2 = \frac{Z^3}{54a_0^3} \frac{1}{4\pi} = \frac{Z^3}{216a_0^3\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z}{6a_0}\right)^3. \quad (\text{A.16})$$

Por lo tanto, insertando esta función en la ecuación (2.11), se tiene que para la transición en $6S_{1/2}$ de $F = 3 \rightarrow F = 4$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3} \mu_0 g_s \mu_B g_I \mu_N |\psi_{ns}(0)|^2 \\ &= \frac{2}{3} (1,25663706212 \cdot 10^{-6}) (2,0023193043737) (9,274009994 \cdot 10^{-24}) \\ &\quad (0,00039885395) (5,050783699 \cdot 10^{-27}) \left[\frac{1}{\pi} \left(\frac{55}{6 \cdot 5,29177210903 \cdot 10^{-11}} \right)^3 \right] \\ &= 5,1852919 \cdot 10^{-26} \text{ J}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

y al tener en cuenta el cambio de energía causado por el cambio del factor F por medio de la ecuación (2.12)

- Para $F = 3, I = 7/2$ y $J = 1/2$

$$E_{HFS} = \frac{A}{2} \left(3(3+1) - \frac{7}{2} \left(\frac{7}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right) = -\frac{9A}{4}. \quad (\text{A.18})$$

- Para $F = 4, I = 7/2$ y $J = 1/2$

$$E_{HFS} = \frac{A}{2} \left(4(4+1) - \frac{7}{2} \left(\frac{7}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right) = \frac{7A}{4}, \quad (\text{A.19})$$

esto lleva a que

$$\Delta E_{HFS} = \frac{7A}{4} - \left(-\frac{9A}{4} \right) = 4A = 4 \cdot (5,1852919 \cdot 10^{-26}) = 2,0741168 \cdot 10^{-25} \text{ J}, \quad (\text{A.20})$$

y obteniendo esto en términos de la frecuencia

$$\nu = \frac{\Delta E_{HFS}}{h} = \frac{2,0741168 \cdot 10^{-25}}{6,62607015 \cdot 10^{-34}} = 3,1302367 \cdot 10^8 \text{ Hz}, \quad (\text{A.21})$$

Este valor está alejado del valor real correspondiente a aquel medido como $A = h \cdot 2,2981579425 \text{ GHz}$ [25] debido a posibles correcciones relativistas que no se realizaron así como defectos cuánticos de los estados, lo cual se vería reflejado en la Figura A.1

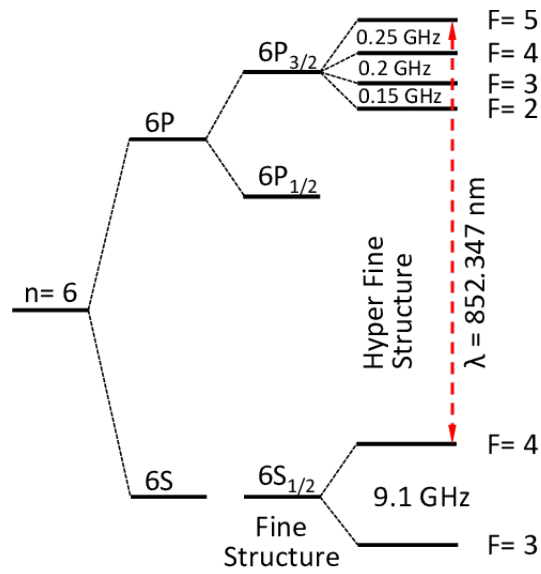


Figura A.1: Esquema de estructura fina e hiperfina para la línea D_2 del Cesio (dada por la transición $6S_{1/2} \rightarrow 6P_{3/2}$) en las que se denotan las separaciones de los niveles de energía en base a las frecuencias de los mismos. Imagen extraída de [41]

Bibliografía

- [1] W. L. Peticolas. “Multiphoton Spectroscopy”. En: *Annual Review of Physical Chemistry* 18.1 (1967), págs. 233-260. DOI: [10.1146/annurev.pc.18.100167.001313](https://doi.org/10.1146/annurev.pc.18.100167.001313).
- [2] P. Norman y K. Ruud. “Microscopic Theory of Nonlinear Optics”. En: *Non-Linear Optical Properties of Matter: From Molecules to Condensed Phases*. Ed. por M. G. Papadopoulos, Andrzej J. Sadlej y Jerzy Leszczynski. Dordrecht: Springer Netherlands, 2006, págs. 1-49. ISBN: 978-1-4020-4850-0. DOI: [10.1007/1-4020-4850-5_1](https://doi.org/10.1007/1-4020-4850-5_1).
- [3] C. Xu y W. W. Webb. “Multiphoton Excitation of Molecular Fluorophores and Nonlinear Laser Microscopy”. En: *Topics in Fluorescence Spectroscopy: Volume 5: Nonlinear and Two-Photon-Induced Fluorescence*. Ed. por J. R. Lakowicz. Boston, MA: Springer US, 2002, págs. 471-540. ISBN: 978-0-306-47070-7. DOI: [10.1007/0-306-47070-5_11](https://doi.org/10.1007/0-306-47070-5_11).
- [4] M. Rumi y J. Perry. “Two-photon absorption: an overview of measurements and principles”. En: *Adv. Opt. Photon.* 2.4 (dic. de 2010), págs. 451-518. DOI: [10.1364/AOP.2.000451](https://doi.org/10.1364/AOP.2.000451).
- [5] M. Bass y col. *Handbook of Optics: Fundamentals, techniques, and design*. 2.^a ed. Vol. 1. Handbook of Optics. McGraw-Hill, 1995. ISBN: 9780070477407.
- [6] Z. Ma y col. “Measurement of Two-Photon Absorption Cross Section of Metal Ions by a Mass Sedimentation Approach”. En: *Scientific Reports* 5.1 (dic. de 2015), pág. 17712. ISSN: 2045-2322. DOI: [10.1038/srep17712](https://doi.org/10.1038/srep17712).
- [7] C. Cheng y col. “Cesium $6S_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$ two-photon-transition-stabilized 822.5 nm diode laser”. En: *Opt. Lett.* 32.5 (mar. de 2007), págs. 563-565. DOI: [10.1364/OL.32.000563](https://doi.org/10.1364/OL.32.000563).
- [8] H. Yu y col. “Theoretical modeling and analysis on the absorption cross section of the two-photon excitation in Rb”. En: *Optics express* 26.13 (2018), págs. 17254-17263.
- [9] M. Göppert-Mayer. “Elementary processes with two quantum transitions.” En: *Annalen der Physik* 18.8 (2009), págs. 466-479.
- [10] J. Lindon. *Encyclopedia of spectroscopy and spectrometry. [recurso electrónico]*. Academic Press, 2010. ISBN: 9780123744135.
- [11] W. Kaiser y C.G.B. Garrett. “Two-photon excitation in CaF₂: Eu²⁺.” En: *Physical Review Letters* 7.6 (1961), págs. 229-231.
- [12] I. D. Abella. “Optical Double-Photon Absorption in Cesium Vapor”. En: *Phys. Rev. Lett.* 9 (11 dic. de 1962), págs. 453-455. DOI: [10.1103/PhysRevLett.9.453](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.9.453).
- [13] J. C. Stockert y A. Blázquez-Castro. *Fluorescence Microscopy In Life Sciences*. Bentham Science Publishers Ltd, 2017. ISBN: 9781681085197.

- [14] W. Denk, J. H. Strickler y W. W. Webb. “Two-photon laser scanning fluorescence microscopy”. En: *Science* 248.4951 (1990), págs. 73-76. DOI: [10.1126/science.2321027](https://doi.org/10.1126/science.2321027).
- [15] A. Ustione y D. W. Piston. “A simple introduction to multiphoton microscopy”. En: *Journal of Microscopy* 243.3 (2011), págs. 221-226. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2818.2011.03532.x>.
- [16] N. S. Makarov y col. “Optimizing two-photon absorption for volumetric optical data storage”. En: *J. Opt. Soc. Am. B* 24.8 (ago. de 2007), págs. 1874-1885. DOI: [10.1364/JOSAB.24.001874](https://doi.org/10.1364/JOSAB.24.001874).
- [17] J. H. Strickler y W. W. Webb. “Three-dimensional optical data storage in refractive media by two-photon point excitation”. En: *Opt. Lett.* 16.22 (nov. de 1991), págs. 1780-1782. DOI: [10.1364/OL.16.001780](https://doi.org/10.1364/OL.16.001780).
- [18] C. W. Spangler y col. “Design, Synthesis and Characterization of New Bimechanistic Optical Power Limiters Based on Reverse Saturable and Two-photon Absorption”. En: *MRS Proceedings* 597 (1999), pág. 369. DOI: [10.1557/PROC-597-369](https://doi.org/10.1557/PROC-597-369).
- [19] J. I. Dadap y col. “Two-photon absorption in diamond and its application to ultraviolet femtosecond pulse-width measurement”. En: *Opt. Lett.* 16.7 (abr. de 1991), págs. 499-501. DOI: [10.1364/OL.16.000499](https://doi.org/10.1364/OL.16.000499).
- [20] H. Steffensen, C. Agger y O. Bang. “Influence of two-photon absorption on soliton self-frequency shift”. En: *J. Opt. Soc. Am. B* 29.3 (mar. de 2012), págs. 484-492. DOI: [10.1364/JOSAB.29.000484](https://doi.org/10.1364/JOSAB.29.000484).
- [21] N. Manrique. “Estabilización en frecuencia de láser centrado en transición atómica de la línea D2 del cesio.” 2020.
- [22] H. J. Metcalf y P. Van der Straten. *Laser cooling and trapping*. Graduate texts in contemporary physics. Springer, 1999. ISBN: 9780387987286.
- [23] C. Foot. *Atomic physics*. Oxford master series in physics. Oxford University Press, 2005. ISBN: 0198506961.
- [24] D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Pearson, 2013. ISBN: 9780321856562.
- [25] D. Steck. “Cesium D Line Data”. En: (nov. de 2019). URL: <http://steck.us/alkalidata>.
- [26] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y J. Laloë. *Quantum Mechanics, Volume 3: Fermions, Bosons, Photons, Correlations, and Entanglement*. 2.^a ed. Quantum Mechanics. Wiley-VCH, 2019. ISBN: 9782759823352.
- [27] G. Arfken y H. Weber. *Mathematical methods for physicists*. Elsevier/Academic Press, 2005. ISBN: 0120598760.
- [28] D. Wolfgang. *Laser Spectroscopy 2 : Experimental Techniques*. Vol. 5th ed. 2015. Springer, 2015. ISBN: 9783662446409.
- [29] D. Wolfgang. *Atoms, Molecules and Photons : An Introduction to Atomic-, Molecular- and Quantum Physics*. Vol. 2nd ed. 2010. Graduate Texts in Physics. Springer, 2010. ISBN: 9783642102974.
- [30] *Stuff to Download*. Ene. de 2012. URL: <https://web.archive.org/web/20200419142949/http://raptor.physics.wisc.edu/download2.htm>.

- [31] R. Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford science publications. Oxford University Press, 2000. ISBN: 0198501765.
- [32] J. J. Sakurai y J. Napolitano. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley, 2011. ISBN: 9780805382914.
- [33] V. Gerginov y col. “Optical frequency measurements of $6s\ ^2S_{1/2} - 6p\ ^2P_{1/2}$ (D_1) transitions in ^{133}Cs and their impact on the fine-structure constant”. En: *Phys. Rev. A* 73 (3 mar. de 2006), pág. 032504. DOI: [10.1103/PhysRevA.73.032504](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.032504).
- [34] V. Gerginov y col. “High-resolution spectroscopy with a femtosecond laser frequency comb”. En: *Opt. Lett.* 30.13 (jul. de 2005), págs. 1734-1736. DOI: [10.1364/OL.30.001734](https://doi.org/10.1364/OL.30.001734).
- [35] K. Herbert. “Interferometric Measurements of Cesium I*”. En: *J. Opt. Soc. Am.* 52.4 (abr. de 1962), págs. 441-447. DOI: [10.1364/JOSA.52.000441](https://doi.org/10.1364/JOSA.52.000441).
- [36] P. Fendel y col. “Two-photon frequency comb spectroscopy of the 6s-8s transition in cesium”. En: *Opt. Lett.* 32.6 (mar. de 2007), págs. 701-703. DOI: [10.1364/OL.32.000701](https://doi.org/10.1364/OL.32.000701).
- [37] H. Eicher. “Third-order susceptibility of alkali metal vapors”. En: *IEEE Journal of Quantum Electronics* 11.4 (1975), págs. 121-130. DOI: [10.1109/JQE.1975.1068583](https://doi.org/10.1109/JQE.1975.1068583).
- [38] C. Cheng y col. “Cesium $6S\ 1/2 \rightarrow 8S\ 1/2$ two-photon-transition-stabilized 822.5 nm diode laser”. En: *Optics letters* 32.5 (2007), págs. 563-565.
- [39] G. Alessandretti y col. “Measurement of the Cs 8S-level lifetime”. En: *Optics Communications* 20.2 (1977), págs. 289-291. ISSN: 0030-4018. DOI: [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(77\)90354-6](https://doi.org/10.1016/0030-4018(77)90354-6). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0030401877903546>.
- [40] D. J. Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Prentice Hall, 1995. ISBN: 0131244051.
- [41] S. Aljunid y col. “Atomic Response in the Near-Field of Nanostructured Plasmonic Metamaterial”. En: *Nano Letters* 16.5 (2016). PMID: 27018806, págs. 3137-3141. DOI: [10.1021/acs.nanolett.6b00446](https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.6b00446). eprint: <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.6b00446>.