

# **Estudio del proceso de absorción de dos fotones no degenerados en átomos de Cesio**

**Michael Stiven Caracas Núñez**

**Director: Mayerlin Núñez Portela Ph.D.**

**Revisor: Dr. Neelima G. Kelkar**



Proyecto Teórico-Computacional  
Departamento de Física  
Bogotá, Colombia

29 de julio de 2022



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Absorción de Dos Fotones . . . . .	1
1.2. Estructura del Átomo de Cesio . . . . .	2
1.3. Estructura Hiperfina del Átomo de Cesio . . . . .	3
1.3.1. Estructura Hiperfina para Electrones con $l = 0$ . . . . .	4
1.3.2. Estructura Hiperfina para Electrones con $l \neq 0$ . . . . .	5
1.4. Problema de Investigación . . . . .	6
<b>2. Cálculo de la Sección Eficaz del 2PA</b>	<b>9</b>
2.1. Ecuación de Propagación . . . . .	9
2.2. Sección Eficaz del 2PA Degenerado . . . . .	11
2.3. Probabilidad de Transición Para el 2PA no Degenerado . . . . .	15
<b>3. Conclusiones y Perspectiva</b>	<b>19</b>



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Absorción de Dos Fotones

La absorción de dos fotones, 2PA por sus siglas en inglés (Two-photon Absorption), es el proceso por el cual un átomo o una molécula absorbe un par de fotones tal que la energía de estos induce una transición del estado base de energía del átomo/molécula a un estado excitado [1]. Este proceso de absorción simultánea fue analizado teóricamente por primera vez en la década de 1930 por Göppert-Mayer, quien, a partir de la teoría de dispersión de Dirac, calculó la probabilidad de que un átomo emitiera simultáneamente dos fotones y posteriormente consideró el proceso inverso, la absorción de dos fotones [2].

Los cálculos teóricos de Mayer se demostraron experimentalmente por primera vez en 1961 poco después de la invención del láser [3]. W. Kaiser y C.G. Garrett, quienes realizaron este primer experimento, investigaron la generación de luz fluorescente azul, de alrededor de  $\lambda = 425$  nm, mediante la iluminación cristales de  $CaF_2 : Eu^{2+}$  con luz roja ( $\lambda = 694,3$  nm) utilizando un maser óptico de rubi [4]. Posteriormente, en 1962 I.D Abella estudio el proceso de 2PA en átomos de Cesio, observando la transición entre los estados  $6S_{1/2}$  y  $9D_{3/2}$ , también por medio un máser de rubi [5].

La invención de la microscopía de fluorescencia de dos fotones a manos de Webb y su equipo de trabajo en 1990 llevó a un alto interés en el estudio de todo tipo de procesos multifotónicos, y desde entonces se han desarrollado aplicaciones del 2PA en microscopía, microfabricación, almacenamiento tridimensional de datos, limitación de potencia óptica, terapia fotodinámica y en la liberación localizada de especies bioactivas [3].

La investigación de las propiedades del 2PA en materiales orgánicos también ha crecido de forma significativa desde la decada de 1990 debido a que cada material necesita ser identificado en cada aplicación del 2PA, caracterizando los requerimientos que estos necesitan para exhibir este proceso. Estos requerimientos suelen ser una combinación de la probabilidad de que se presente el 2PA a una determinada longitud de onda (cuantificada por la sección eficaz del 2PA), y una alta sensibilidad para que se produzca un efecto secundario debido a la absorción de dos fotones. Dicho efecto secundario puede ser la emisión de fluorescencia, una reacción fotoquímica, o una sensibilización

de otro material [1].

Desde la comprobación experimental de la absorción de dos fotones, se han desarrollado diversas técnicas para determinar el espectro del 2PA de diversos materiales y medir sus secciones eficaces, en particular para moléculas [6, 7, 8] y átomos de Rubidio [9]. En la actualidad podemos clasificar estas técnicas en dos grandes categorías: métodos directos, en los que se mide la atenuación del láser usado en la excitación del material; y métodos indirectos, en los que se miden los efectos secundarios producidos por el 2PA (fluorescencia inducida, cambio en la temperatura del material, etc) [1].

El proceso de absorción de dos fotones se puede dividir a su vez en dos casos, el caso degenerado, en el que los dos fotones tienen la misma energía, y el caso no degenerado, en el que la energía de los fotones es distinta (ver Fig. 1.1).

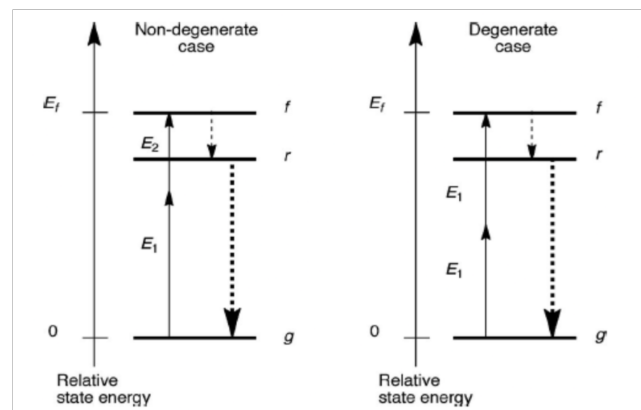


Figura 1.1: Esquema del diagrama de energía que muestra la excitación de una molécula del estado base  $g$ , a un estado excitado  $f$ , localizado a una energía  $E_f$  sobre el estado base. Imagen tomada de [1].

La gran mayoría de los resultados en la medida de la sección eficaz del 2PA corresponden al caso degenerado, y algunas aplicaciones del uso de rayos de luz no degenerados han sido descritas para casos particulares, como el del Rubidio, y pueden volverse más conocidas una vez que se entiendan mejor las propiedades de los materiales bajo este tipo de absorción [1].

## 1.2 Estructura del Átomo de Cesio

Como ya se observó, el 2PA tiene una amplia serie de aplicaciones en diferentes áreas de desarrollo tecnológico y de conocimiento, los ejemplos mencionados en la sección anterior fueron la espectroscopía de materiales, microscopía, microfabricación, almacenamiento de datos, terapia fotodinámica, etc. Esto demuestra la importancia en la actualidad que tiene la investigación de este proceso de absorción de fotones.

En particular, al considerar la aplicación directa de este proceso 2PA a átomos de Cesio, se puede partir con la ventaja teórica de analizar un átomo alcalino cuya estructura es muy similar a la del átomo de hidrógeno, y de que en la actualidad, las

transiciones para el átomo de Cesio están muy bien caracterizadas. Además, las frecuencias de transición de este elemento atómico (Ver Fig. 1.2) son muy utilizadas en medidas de tiempo (relojes), sistemas de posicionamiento global satelital (GPS), redes de telecomunicación, y varias aplicaciones más.

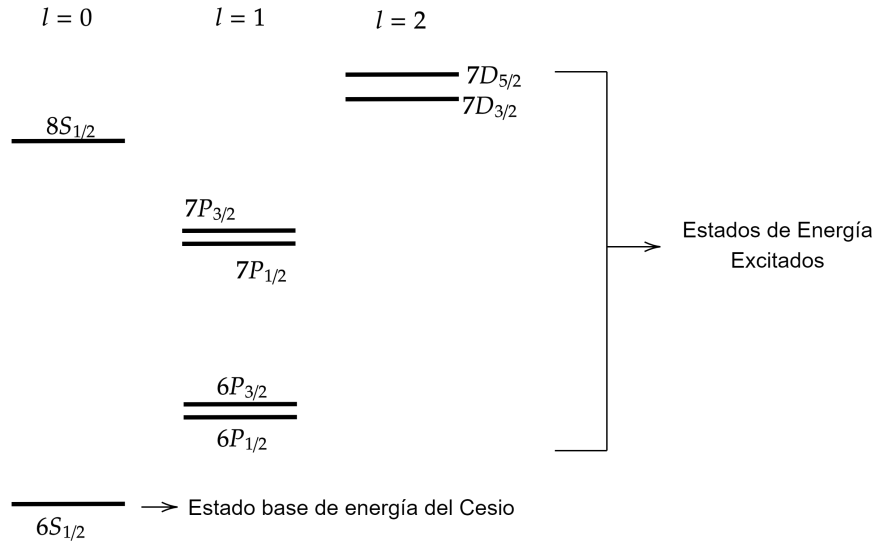


Figura 1.2: Estructura fina del átomo de Cesio. Aquí se muestra el estado base de energía y algunos de los estados excitados en su correspondiente nivel  $l$  de momento angular orbital. Estos niveles de energía son degenerados.

### 1.3 Estructura Hiperfina del Átomo de Cesio

En estudios, tanto teóricos como experimentales, del proceso 2PA del átomo de Cesio es importante considerar los estados corregidos por estructura hiperfina para tener una mayor caracterización de las transiciones y sus probabilidades bajo este tipo de procesos multifotónicos.

Para levantar el degeneramiento de los estados excitados correspondientes a la estructura fina del átomo de Cesio, se considerará la corrección a estos estados por estructura hiperfina [10]. En este caso se debe tener en cuenta el momento magnético del núcleo del átomo  $\mu_{\mathbf{I}}$  que se relaciona con el espín nuclear  $\mathbf{I}$  como

$$\mu_{\mathbf{I}} = g_I \mu_N \mathbf{I}, \quad (1.1)$$

donde  $g_I$  es el factor  $g$  nuclear, que en el caso del átomo de Cesio tiene el valor  $g_I = 5,6$ , y  $\mu_N$  es el magneton nuclear que se relaciona con el magneton de Bohr  $\mu_B$  mediante la razón entre las masas del electrón y del protón:

$$\mu_N = \mu_B \frac{m_e}{m_p} \approx \frac{\mu_B}{1836}. \quad (1.2)$$

El Hamiltoniano correspondiente a la interacción de  $\mu_I$  con la densidad de flujo magnético  $\mathbf{B}_e$  creado por los electrones atómicos es

$$H_{HFS} = -\mu_I \cdot \mathbf{B}_e. \quad (1.3)$$

Se encontrará primero la corrección a los niveles de energía para el caso en el que los electrones con momento angular orbital  $l = 0$ , y luego se usará una estrategia similar para deducir las correcciones de estructura hiperfina en el caso en el que los electrones tienen  $l \neq 0$ .

### 1.3.1 Estructura Hiperfina para Electrones con $l = 0$

Considerando que los electrones tienen una distribución de densidad de carga de la forma  $-e|\psi(r)|^2$ , y que los electrones con  $l = 0$  pueden modelarse como una distribución de magnetización de la forma [10]

$$\mathbf{M} = -g_s \mu_B \mathbf{S} |\psi(r)|^2, \quad (1.4)$$

donde  $g_s$  es el factor g asociado al electrón (en los cálculos para el átomo de Cesio se tomará  $g_s = 2$ ), se puede escribir la densidad de flujo magnético  $\mathbf{B}_e$  a partir del electromagnetismo clásico como

$$\mathbf{B}_e = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} = -\frac{2}{3} \mu_0 g_s \mu_B |\psi(r)|^2 \mathbf{S}, \quad (1.5)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío. Para determinar exactamente la forma de este campo, se toman dos consideraciones:

- Como la distribución de densidad de carga eléctrica es esféricamente simétrica, se asume que para las partes de la distribución ubicadas a un radio  $r_b \ll a_0$ , donde  $a_0$  es el radio de Bohr, la distribución de carga tiene un valor constante  $|\psi(0)|^2$ .
- Se asume que para elementos de la distribución ubicadas en radios  $r \gg r_b$  no se produce flujo magnético en  $r = 0$ .

Imponiendo estas condiciones sobre el flujo magnético en la Ec. 1.5, se encuentra que el Hamiltoniano asociado a la estructura hiperfina se convierte en

$$H_{HFS} = g_I \mu_N \mathbf{I} \cdot \frac{2}{3} \mu_0 g_s \mu_B |\psi(0)|^2 \mathbf{S} = \mathbf{A} \mathbf{I} \cdot \mathbf{S}. \quad (1.6)$$

Esta interacción se conoce como la *interacción de contacto de Fermi*, y también se puede expresar como

$$H_{HFS} = \mathbf{A} \mathbf{I} \cdot \mathbf{J}, \quad (1.7)$$

porque  $\mathbf{J} = \mathbf{S}$  para  $l = 0$ .

La interacción debida a la estructura hiperfina provoca que el momento nuclear  $\mathbf{I}$  y el momento angular total  $\mathbf{J}$  (orbital más espín) cambien de dirección, pero el momento angular total del átomo  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$  se mantiene constante. Los números cuánticos que



representan a  $\mathbf{F}$  y su proyección en  $z$  se denotan por  $F$  y  $M_F$  respectivamente, de forma que los estados propios de energía del Hamiltoniano  $H_{HFS}$  son  $|I, J, F, M_F\rangle$ . Con esto, el valor esperado del Hamiltoniano en la Ec. 1.7 corresponde a

$$E_{HFS} = \frac{A}{2} [F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)]. \quad (1.8)$$

### 1.3.2 Estructura Hiperfina para Electrones con $l \neq 0$

Los electrones con momento angular orbital distinto de cero que orbitan alrededor del núcleo generan un campo magnético de la forma [10]

$$\mathbf{B}_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{e\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mu_e - 4(\mu_e \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}}{r^3} \right]. \quad (1.9)$$

El primer término en paréntesis corresponde al movimiento orbital del electrón, donde  $e\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 2\mu_B \mathbf{L}$ . El segundo término es el campo magnético producido por el momento dipolar de espín del electrón  $\mu_e = -2\mu_B \mathbf{S}$  en la posición  $-\mathbf{r}$  con respecto al dipolo. De esta forma

$$\mathbf{B}_e = -2 \frac{\mu_0 \mu_B}{4\pi r^3} \left[ \mathbf{L} - \mathbf{S} + \frac{3(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right], \quad (1.10)$$

el cual, para el problema del átomo de Cesio, toma el valor aproximado

$$\mathbf{B}_e \approx -2 \frac{\mu_0 \mu_B}{4\pi} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \mathbf{J}. \quad (1.11)$$

De esta forma, vemos que la interacción debida a estructura hiperfina para electrones con momento angular orbital distinto de cero tiene la forma similar  $H_{HFS} = A \mathbf{I} \cdot \mathbf{J}$ , solo que en este caso la constante  $A$  tiene valor

$$A = \frac{\mu_0}{2\pi} g_I \mu_N \mu_B \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle. \quad (1.12)$$

donde

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{l(l+\frac{1}{2})(l+1)} \left( \frac{Z}{na_0} \right)^3 \quad (1.13)$$

Para el átomo de Cesio la Ec. 1.12 corresponde entonces a

$$A = \frac{g_I \mu_N \mu_0 \mu_B}{1296\pi} \left( \frac{55}{a_0} \right)^3 \quad (1.14)$$

Usando las Ecs. 1.8 y 1.14, se pueden calcular los desdoblamientos de los niveles de energía debido a la estructura hiperfina del átomo de Cesio, tal y como se observa en la Fig. 1.3.

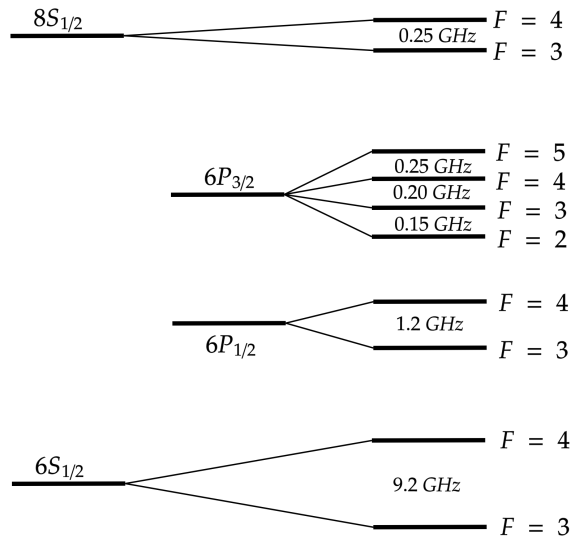


Figura 1.3: Correcciones por estructura hiperfina a los niveles  $6S_{1/2}$ ,  $6P_{1/2}$ ,  $6P_{3/2}$  y  $8S_{1/2}$  del átomo de Cesio. La separación entre cada nivel  $F$  está dada en frecuencia.

Observando la Fig. 1.4, se concluye que los valores calculados para la separación de los niveles de energía corregidos por estructura hiperfina para los niveles  $6S_{1/2}$  y  $6P_{3/2}$  coinciden bastante bien con los valores reportados por [11]. En este caso se complementa esta información de la separación entre los niveles corregidos para los estados  $6P_{1/2}$ ,  $8S_{1/2}$ .

## 1.4 Problema de Investigación

Medir la sección eficaz  $\sigma^{(2)}$  del 2PA es en general, el punto de partida para realizar experimentos que buscan producir estas transiciones mediante técnicas de espectroscopía libre de efecto Doppler usando otros tipos de fuentes de luz, como por ejemplo, fuentes de pares de fotones enredados, y el primer paso para esto es realizar los cálculos correspondientes al  $\sigma^{(2)}$  para tener datos con los que contrastar a la hora de realizar el experimento.

Es por esto que el presente trabajo consiste en estudiar el proceso de absorción de dos fotones en átomos de Cesio de forma teórica realizando el cálculo de la sección eficaz del 2PA para el caso no denegerado.

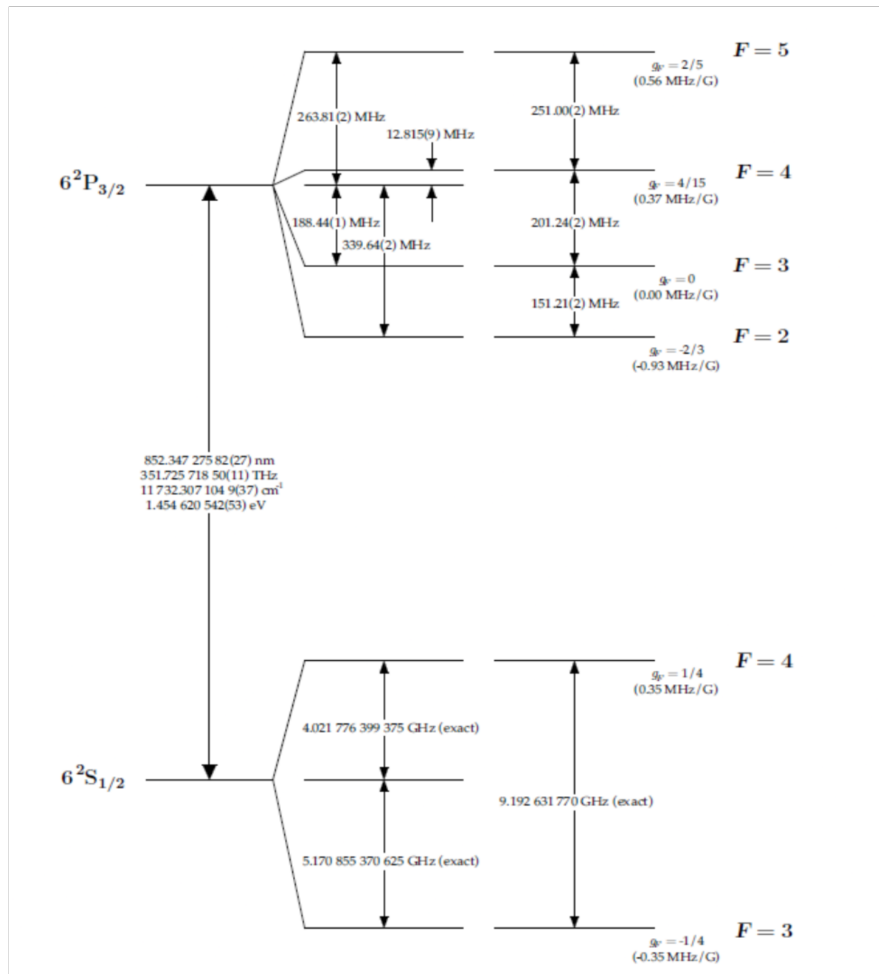


Figura 1.4: Valores de la separación en frecuencia de los niveles de energía para estructura fina e hiperfina reportados por [11].



# Capítulo 2

## Cálculo de la Sección Eficaz del 2PA

### 2.1 Ecuación de Propagación

La forma general en la que se puede abordar el problema del cálculo de la sección eficaz  $\sigma^{(2)}$  del 2PA es estudiando la atenuación de la intensidad de la radiación electromagnética que interactúa un material.

Consideremos un haz de luz de longitud de onda  $\lambda$  y frecuencia angular  $\omega$  que incide sobre un material capaz de exhibir el proceso de absorción de dos fotones. De forma general, si el haz en cuestión se propaga a lo largo del eje  $z$  y el material es capaz también de exhibir transiciones asociadas a la absorción de un fotón, las secciones eficaces  $\sigma^{(1)}$  y  $\sigma^{(2)}$  para la absorción de uno y dos fotones, respectivamente, se pueden relacionar con el flujo de fotones  $\phi$  y la densidad de moléculas en el estado base  $N$  del material 2PA mediante la ecuación de propagación [1] (Ver Fig. 2.1)

$$\frac{d\phi}{dz} = -\sigma^{(1)}N\phi - N\sigma^{(2)}\phi^2. \quad (2.1)$$

En el presente trabajo se considerará que el material únicamente exhibe absorción de un fotón, por lo que el segundo término en la Ec. 2.1 domina ampliamente sobre el primero y así, la atenuación del haz se puede escribir como

$$\frac{d\phi}{dz} = -N\sigma^{(2)}\phi^2. \quad (2.2)$$

El flujo de fotones se relaciona con la intensidad del haz incidente  $I$  mediante la energía del fotón  $E_\nu = hc/\lambda = \hbar\omega$ :

$$\phi = \frac{I}{E_\nu}, \quad (2.3)$$

de forma que la Ec. 2.1 se puede reescribir en términos de la intensidad como

$$\frac{dI}{dz} = -N\sigma^{(2)}\frac{I^2}{E_\nu}. \quad (2.4)$$

Si se quiere relacionar la sección eficaz con la tasa de fotones absorbidos (*Rate*), lo que se debe hacer es integrar esta cantidad con respecto al volumen del haz a lo largo del

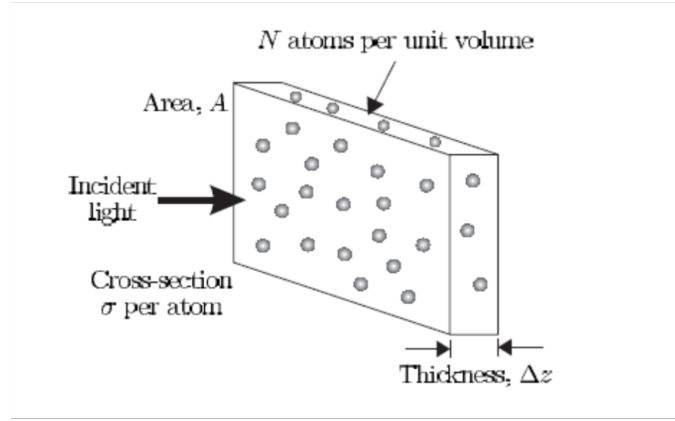


Figura 2.1: Representación gráfica de un haz que incide sobre un bloque de espesor  $\Delta z$ , área  $A$ , densidad de átomos  $N$  y sección eficaz por átomo  $\sigma$ . El cambio en la intensidad de la luz en función de la distancia de propagación a lo largo del material (atenuación) es proporcional a  $\sigma$ . Imagen tomada de [10]

material 2PA, de forma que

$$Rate = \int \frac{dI}{dz} dV = \int -N\sigma^{(2)} \frac{I^2}{E_v} dV. \quad (2.5)$$

Esta integral es equivalente a multiplicar por el volumen  $V$  del haz a lo largo del material, asumiendo que  $I$  es constante sobre todo el volumen:

$$Rate = -N\sigma^{(2)} \frac{I^2}{E_v} V. \quad (2.6)$$

y si se asume que el haz está colimado a lo largo del material, se puede escribir el volumen como  $V = Az_R$ , donde  $A = \pi w_0^2$  es el área del perfil transversal del haz,  $w_0$  es la cintura del láser, y  $z_R$  es el rango de Rayleigh del haz. Usando esto la Ec. 2.4 se puede reescribir como

$$Rate = -N\sigma^{(2)} \left( \frac{I^2}{E_v} \right) Az_R, \quad (2.7)$$

si se usa ahora el hecho de que la intensidad es potencia  $P$  sobre área  $A$ , la expresión del  $Rate$  se convierte en

$$Rate = -N\sigma^{(2)} \frac{P^2}{AE_v} z_R, \quad (2.8)$$

finalmente, como  $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ , se obtiene una expresión final para el  $Rate$  en función de la sección eficaz del 2PA y la potencia de la luz láser incidente:

$$Rate = -N\sigma^{(2)} \frac{P^2}{hc}. \quad (2.9)$$

Esta ecuación indica que, si experimentalmente se obtienen medidas para la tasa de fotones en función de la potencia del láser, se podrá encontrar una relación lineal entre el  $Rate$  y el cuadrado de la potencia  $P$ , cuya pendiente estará relacionada con la sección eficaz del 2PA  $\sigma^{(2)}$ .

## 2.2 Sección Eficaz del 2PA Degenerado

La sección eficaz del 2PA se puede relacionar con la probabilidad de transición de dos fotones por unidad de tiempo  $\Gamma_{i \rightarrow n}$  desde un estado inicial  $i$  a un estado excitado  $n$ . Para encontrar la probabilidad, se aplica la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo a segundo orden y así se encuentra que [12]

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \left( \frac{2\pi}{\hbar^3} \right) \left( \frac{e|E_0|}{2} \right)^4 \left( \sum_{m,j} \frac{\mu_{ij}\mu_{jf}\mu_{fm}\mu_{mi}}{(\omega_{mi} - \omega)(\omega_{ji} - \omega_{int})} \right) \delta(E_f - E_i - 2\hbar\omega), \quad (2.10)$$

donde  $e$  es la carga del electrón,  $E_0$  es la amplitud del campo eléctrico de la radiación incidente,  $m, j$  son estados virtuales entre los estados inicial  $i$  y excitado  $f$ , los cuales se definen como la suma de todos los posibles estados atómicos;  $\omega_{mi}, \omega_{ji}$  son las frecuencias angulares de transición entre los estados  $m \rightarrow i$ , y  $i \rightarrow j$ , respectivamente,  $\omega$  es la frecuencia angular del haz incidente,  $\omega_{int}$  es un valor fijo de frecuencia angular correspondiente a un nivel intermedio entre los niveles  $j$ , y  $\mu_{ij}, \mu_{jf}, \mu_{fm}, \mu_{mi}$  son los elementos matriciales del operador de dipolo eléctrico definidos como

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \langle i | \hat{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{r}} | j \rangle, \\ \mu_{if} &= \langle i | \hat{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{r}} | f \rangle, \\ \mu_{fm} &= \langle f | \hat{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{r}} | m \rangle, \\ \mu_{mi} &= \langle m | \hat{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{r}} | i \rangle, \end{aligned}$$

donde  $\hat{\epsilon}$  es la dirección de polarización. Si se multiplica la tasa de transición en la Ec. 1.8 por la densidad de fotones en el estado base  $N$ , se puede obtener la tasa de transición por unidad de volumen

$$\Gamma_{i \rightarrow f}^{(2)} = \left( \frac{2\pi N}{\hbar^3} \right) \left( \frac{e|E_0|}{2} \right)^4 \left( \sum_{m,j} \frac{\mu_{ij}\mu_{jf}\mu_{fm}\mu_{mi}}{(\omega_{mi} - \omega)(\omega_{ji} - \omega_{int})} \right) \delta(E_f - E_i - 2\hbar\omega). \quad (2.11)$$

Esta tasa de transición por unidad de volumen es la que se puede usar para realizar el cálculo de la sección eficaz  $\sigma^{(2)}$ . La Ec. 2.4 indica que

$$\frac{dI}{dz} = -N\sigma^{(2)} \left( \frac{I^2}{E_v} \right) = -\frac{\beta}{E_v} I^2, \quad (2.12)$$

donde  $\beta$  es el coeficiente de absorción de 2PA. Este coeficiente se puede definir en función de la frecuencia del haz incidente como [13]

$$\beta(\omega) = \frac{2\hbar\omega}{I^2} \Gamma_{i \rightarrow f}^{(2)} = N\sigma^{(2)}, \quad (2.13)$$

y con base en esto se puede dar otra definición para la sección eficaz, esta vez en función de la tasa de transición por unidad de volumen, como

$$\sigma^{(2)} = \left( \frac{2\hbar\omega}{NI^2} \right) \left( \frac{2\pi N}{\hbar^3} \right) \left( \frac{e|E_0|}{2} \right)^4 \left( \sum_{m,j} \frac{\mu_{ij}\mu_{jf}\mu_{fm}\mu_{mi}}{(\omega_{mi} - \omega)(\omega_{ji} - \omega_{int})} \right) \delta(E_f - E_i - 2\hbar\omega). \quad (2.14)$$

Teóricamente es normal pensar que las transiciones tienen energías bien definidas, pero en sistemas atómicos esto no es posible debido al principio de incertidumbre de Heisenberg. Debido a esto, la función delta que aparece en la tasa de transición se puede reemplazar por un ensanchamiento de la línea espectral mediante la lorentziana

$$\delta(E_f - E_i - 2\hbar\omega) = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{\gamma_{fi}}{(\omega_{fi} - 2\omega)^2 + \gamma_{fi}^2 \pi^2} \right), \quad (2.15)$$

donde  $\omega_{fi}$  es la frecuencia de transición entre el estado base  $i$  y el estado final excitado  $f$ , y  $\gamma_{fi}$  corresponde al ancho de línea natural de dicha transición. Con esto, y usando el hecho de que  $\omega = 2\pi\nu$ , se puede reescribir la sección eficaz en la Ec. 2.14 como

$$\sigma^{(2)} = \frac{(e|E_0|)^4 \pi \nu}{4I^2 \hbar^3} \left( \sum_{m,j} \frac{\mu_{ij} \mu_{jf} \mu_{fm} \mu_{mi}}{(\nu_{mi} - \nu)(\nu_{ji} - \nu_{int})} \right) \left( \frac{\gamma_{fi}}{(\nu_{fi} - 2\nu)^2 + \gamma_{fi}^2/4} \right). \quad (2.16)$$

Considerando que a lo largo del material 2PA, la onda se puede considerar plana y monocromática, la intensidad se puede escribir como

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} |E_0|^2, \quad (2.17)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío. Con esto, la Ec. 2.16 se convierte en

$$\sigma^{(2)} = \left( \frac{\nu e^4 \mu_0}{\epsilon_0 \hbar^3} \right) \left( \sum_{m,j} \frac{\mu_{ij} \mu_{jf} \mu_{fm} \mu_{mi}}{(\nu_{mi} - \nu)(\nu_{ji} - \nu_{int})} \right) \left( \frac{\gamma_{fi}}{(\nu_{fi} - 2\nu)^2 + \gamma_{fi}^2/4} \right), \quad (2.18)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío.

Para el caso del átomo de Cesio, las frecuencias de transición que se consideran son  $6S_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$ ,  $6S_{1/2} \rightarrow 7D_{3/2}$  y  $6S_{1/2} \rightarrow 7D_{5/2}$ , como se ve en la Fig. 2.2.

La expresión en la Ec. 2.18 corresponde a la sección eficaz total del 2PA, de forma que los términos que componen esta suma son los  $\sigma^{(2)}$  asociados a las transiciones por 2PA (líneas punteadas) indicadas en la Fig. 2.2, y donde las transiciones a niveles intermedios que se tienen en cuenta son las indicadas en la Fig. 2.2 mediante líneas sólidas, pues las transiciones a demás estados virtuales presentan frecuencias de transición tan altas, que los términos en la suma de la Ec. 2.18 correspondientes a estos estados virtuales se pueden despreciar.

Considerando lo anterior y teniendo en cuenta la degeneración de los estados excitados debido a la estructura fina, y también la probabilidad de ocupación  $\rho_{ii}^{(0)}$  del estado base, se puede expandir la sumatoria como sigue [9]:

$$\sigma^{(2)} = \frac{\nu e^4 \mu_0}{\epsilon_0 \hbar^3} \left[ \frac{2\gamma_{8S_{1/2}, 6S_{1/2}}}{\gamma_{8S_{1/2}, 6S_{1/2}}^2 + (\nu_{8S_{1/2}, 6S_{1/2}} - 2\nu)^2} + \frac{4\gamma_{7D_{3/2}, 6S_{1/2}}}{\gamma_{7D_{3/2}, 6S_{1/2}}^2 + (\nu_{7D_{3/2}, 6S_{1/2}} - 2\nu)^2} + \frac{6\gamma_{7D_{5/2}, 6S_{1/2}}}{\gamma_{7D_{5/2}, 6S_{1/2}}^2 + (\nu_{7D_{5/2}, 6S_{1/2}} - 2\nu)^2} \right] \sum \frac{\mu_{ij} \mu_{jf} \mu_{fm} \mu_{mi}}{(\nu_{mi} - \nu)(\nu_{ji} - \nu_{int})} \rho_{ii}^{(0)} \quad (2.19)$$



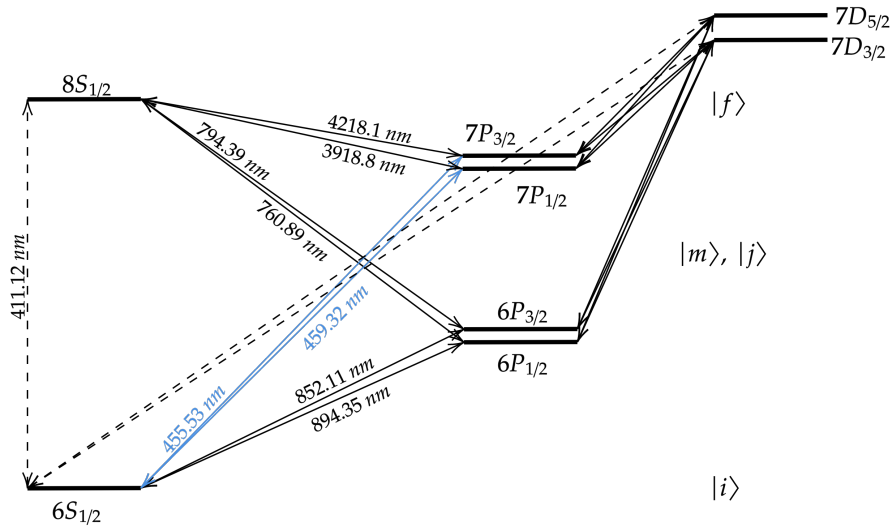


Figura 2.2: Esquema de las transiciones del átomo de Cesio a partir de las reglas de selección para absorción de uno y dos fotones. Las de un fotón están denotadas por líneas sólidas, mientras que las de dos fotones se indican mediante las líneas punteadas. Cada línea representa los posibles caminos de transición (excitación a un nivel de energía superior o decaimiento a uno inferior). El valor de las longitudes de onda correspondientes a cada transición fueron tomados de [14, 15, 16, 17, 18, 19].

El factor de ocupación  $\rho_{ii}^{(0)}$  se define como

$$\rho_{ii}^{(0)} = \frac{1}{2J_i + 1} \quad (2.20)$$

donde  $J_i$  es el momento angular  $J$  correspondiente al estado base del átomo de Cesio, que en este caso es  $1/2$ , de forma que  $\rho_{ii}^{(0)} = 1/2$ . En el presente trabajo se enfocarán los cálculos del  $\sigma^{(2)}$  únicamente para la transición  $6S_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$ , de forma que, usando los valores en las Tablas 2.1, 2.2 y 2.3, podemos representar gráficamente la sección eficaz del 2PA degenerado para la transición esta transición como se muestra en la Fig. 2.3

	<b>Constantes</b>
$c$	$3 \times 10^8 \text{ m/s}$
$e$	$1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
$\epsilon_0$	$8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$
$h$	$6,626 \times 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{s}$
$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$

Tabla 2.1: Valores de las constantes fundamentales.

Transiciones	Frecuencias de Transición (Hz)
$6S_{1/2} \rightarrow 6P_{1/2}$	$3,3546 \times 10^{16}$
$6S_{1/2} \rightarrow 6P_{3/2}$	$3,5207 \times 10^{16}$
$6S_{1/2} \rightarrow 7P_{1/2}$	$6,5317 \times 10^{16}$
$6S_{1/2} \rightarrow 7P_{3/2}$	$6,626 \times 10^{16}$
$6S_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$	$7,2974 \times 10^{16}$

Tabla 2.2: Valores de las frecuencias de transición de las transiciones  $6S_{1/2} \rightarrow 6P_{1/2}$ ,  $6S_{1/2} \rightarrow 6P_{3/2}$ ,  $6S_{1/2} \rightarrow 7P_{1/2}$ ,  $6S_{1/2} \rightarrow 7P_{3/2}$  y  $6S_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$ .

Transiciones	$\mu$ ( $10^{-10} m$ )	Transiciones	$\mu$ ( $10^{-10} m$ )
$6S_{1/2} \rightarrow 6P_{1/2}$	2,4541	$8S_{1/2} \rightarrow 6P_{1/2}$	-0,5228
$6P_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$	-0,5228	$6P_{1/2} \rightarrow 6S_{1/2}$	2,4542
$6S_{1/2} \rightarrow 6P_{3/2}$	3,4707	$8S_{1/2} \rightarrow 6P_{3/2}$	-0,7394
$6P_{3/2} \rightarrow 8S_{1/2}$	0,7394	$6P_{3/2} \rightarrow 6S_{1/2}$	-3,4707
$6S_{1/2} \rightarrow 7P_{1/2}$	0,2752	$8S_{1/2} \rightarrow 7P_{1/2}$	-5,0984
$7P_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$	-5,0984	$7P_{1/2} \rightarrow 6S_{1/2}$	0,2752
$6S_{1/2} \rightarrow 7P_{3/2}$	0,3892	$8S_{1/2} \rightarrow 7P_{3/2}$	-7,2103
$7P_{3/2} \rightarrow 8S_{1/2}$	7,2103	$7P_{3/2} \rightarrow 6S_{1/2}$	-0,3892

Tabla 2.3: Valores Elementos Matriciales  $\mu$ . Resultados tomados de [12].

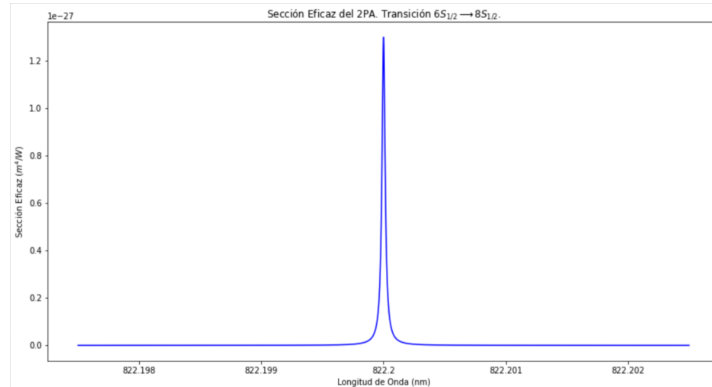


Figura 2.3: Gráfica de la sección eficaz del 2PA para la transición  $6S_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$  en el átomo de Cesio. El eje x corresponde a la longitud de onda del haz. El eje y corresponde a  $\sigma^{(2)}$ .

El comportamiento de la sección eficaz del 2PA en función de la longitud de onda  $\lambda$  del haz incidente sobre los átomos de Cesio, la cual corresponde a dos veces la longitud de excitación del átomo, que se aprecia en la Fig. 2.3, indica que  $\sigma^{(2)}$  incrementa rápidamente a medida que  $\lambda$  se acerca al valor de resonancia (frecuencia de máxima excitación), y de igual manera decrece muy rápido a medida que  $\lambda$  se aleja de este valor de resonancia. En este caso se observa que el pico de máxima excitación está centrado alrededor de los 822,2 nm, la cual corresponde al doble de la energía de excitación de la línea  $6S_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$ .

## 2.3 Probabilidad de Transición Para el 2PA no Degenerado

El primer acercamiento para lograr estudiar la sección eficaz del 2PA en átomos de Cesio para el caso no degenerado es aplicar nuevamente la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo a segundo orden considerando ahora la superposición de dos modos de oscilación  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= E_{01} \cos(\hat{n} \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t) \hat{\mathbf{e}}_1, \\ \mathbf{E}_2 &= E_{02} \cos(\hat{n} \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t) \hat{\mathbf{e}}_2.\end{aligned}$$

Por simplicidad, se asumirá que ambos campos tienen la misma amplitud  $E_{01} = E_{02} = E_0$  y la misma polarización  $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}$ , de forma que la superposición de estos modos se puede escribir como

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{e}} [\cos(\hat{n} \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t) + \cos(\hat{n} \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)], \quad (2.21)$$

de forma que se pueda definir el hamiltoniano de interacción  $\hat{H}_I$  (únicamente para el término correspondiente a la absorción estimulada) como

$$\hat{H}_I = -\frac{eE_0}{2} \left( e^{i(\hat{n} \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} + e^{i(\hat{n} \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)} \right) \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{r}. \quad (2.22)$$

De esta forma, la corrección a los coeficientes  $c_n(t)$  de los estados corregidos a segundo orden se puede escribir como

$$c_n(t) = \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \sum_m \int_0^t \int_0^{t'} \langle \psi_f | \hat{H}_I(t') | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \hat{H}_I(t'') | \psi_i \rangle e^{i\omega_{fm}t'} e^{i\omega_{mi}t''} dt' dt'', \quad (2.23)$$

donde  $\psi_i$  y  $\psi_f$  son los estados inicial y final del átomo de Cesio, y  $\psi_m$  un estado de energía intermedio;  $\omega_{fm}$  es la frecuencia de transición entre el estado final e intermedio, y  $\omega_{mi}$  la frecuencia de transición entre el estado intermedio e inicial.

Si se toma el cambio de variable

$$\begin{aligned}\langle \psi_f | \hat{H}_I(t') | \psi_m \rangle &= V_{fm}(t'), \\ \langle \psi_m | \hat{H}_I(t'') | \psi_i \rangle &= V_{mi}(t''),\end{aligned}$$

se puede reescribir la Ec. 2.22 como

$$c_n(t) = \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \sum_m \int_0^t dt' e^{i\omega_{fm}t'} V_{fm}(t') \int_0^{t'} dt'' e^{i\omega_{mi}t''} V_{mi}(t''). \quad (2.24)$$

Notese que  $V(t)$  se puede representar como

$$V(t) = v^\dagger (e^{-i\omega_1 t} + e^{-i\omega_2 t}), \quad (2.25)$$

donde  $v^\dagger$  está relacionado con los elementos matriciales correspondiente al operador dipolar eléctrico:

$$v^\dagger = -\frac{eE_0}{2} e^{i\hat{n} \cdot \mathbf{r}} \langle a | \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{r} | b \rangle, \quad (2.26)$$

donde  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  son estados cualesquiera. Como las longitudes de onda correspondientes a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son más grandes que el tamaño del átomo, es posible aplicar la aproximación

$$e^{i\hat{n}\cdot\mathbf{r}} \approx 1, \quad (2.27)$$

de forma que

$$v^\dagger = -\frac{eE_0}{2} \langle a | \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{r} | b \rangle, \quad (2.28)$$

y con esto, es posible reescribir los  $c_n$  en la Ec. 2.23 como

$$c_n(t) = \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \sum_m v_{fm}^\dagger v_{mi}^\dagger \int_0^t dt' e^{i\omega_{fm}t'} (e^{-i\omega_1 t'} + e^{-i\omega_2 t'}) \int_0^{t'} dt'' e^{i\omega_{mi}t''} (e^{-i\omega_1 t''} + e^{-i\omega_2 t''}). \quad (2.29)$$

Ahora, nuevamente es necesario recalcar el hecho de que la absorción de los dos fotones no es de forma simultánea, y existe un tiempo asociado a la llegada de cada fotón al núcleo del átomo, por lo que en realidad los límites de integración deberían modificarse de forma que se haga explícita esta diferencia en los tiempos de llegada de cada fotón. Sin embargo, se desea estudiar a grandes rasgos la forma de la probabilidad de transición debida al 2PA no degenerado, por lo que en el presente cálculo no se tendrá en cuenta este detalle.

Dicho lo anterior, si se define la frecuencia de transición  $\omega_0$  como

$$\omega_0 = \omega_{fm} + \omega_{mi} = \omega_1 + \omega_2, \quad (2.30)$$

al resolver la integral con respecto a  $t''$  en la Ec. 2.28, la integral con respecto a  $t'$  se puede evaluar separándola en dos grandes términos:

$$I_1 = \int_0^t dt' \left[ \frac{e^{i(\omega_0 - 2\omega_1)t'} - e^{i(\omega_{fm} - \omega_1)t'}}{i(\omega_{mi} - \omega_1)} + \frac{1 - e^{i(\omega_{fm} - \omega_1)t'}}{i(\omega_{mi} - \omega_2)} \right], \quad (2.31)$$

y

$$I_2 = \int_0^t dt' \left[ \frac{e^{i(\omega_0 - 2\omega_2)t'} - e^{i(\omega_{fm} - \omega_2)t'}}{i(\omega_{mi} - \omega_2)} + \frac{1 - e^{i(\omega_{fm} - \omega_2)t'}}{i(\omega_{mi} - \omega_1)} \right], \quad (2.32)$$

Al resolver ambas integrales, aparecerán términos de la forma  $e^{i(\omega_0 - 2\omega_1)t'} - 1$  y  $e^{i(\omega_0 - 2\omega_2)t'} - 1$  cuya física corresponde al caso estudiado en la sección anterior para el 2PA degenerado, en este caso para las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , por lo que no se tendrá en cuenta estos términos. De esta forma, al conservar los términos concernientes al 2PA no degenerado, la suma de ambas integrales da lugar a los siguientes términos:

$$I_1 + I_2 \approx \frac{e^{i(\omega_{fm} - \omega_1)t} - 1}{(\omega_{fm} - \omega_1)(\omega_{mi} - \omega_1)} + \frac{e^{i(\omega_{fm} - \omega_2)t} - 1}{(\omega_{fm} - \omega_2)(\omega_{mi} - \omega_2)} \\ + \frac{1 - e^{i(\omega_{fm} - \omega_1)t}}{(\omega_{mi} - \omega_2)(\omega_{fm} - \omega_1)} + \frac{1 - e^{i(\omega_{fm} - \omega_2)t}}{(\omega_{mi} - \omega_1)(\omega_{fm} - \omega_2)},$$

es importante mencionar que también aparece un término de la forma

$$\left[ \frac{2\omega_{mi} - \omega_0}{i(\omega_{mi} - \omega_1)(\omega_{mi} - \omega_2)} \right] t,$$

pero este término, donde  $t$  corresponde justamente a la diferencia en el tiempo de llegada entre ambos fotones como se mencionó anteriormente, se podrá desprejciar considerando que esta diferencia es muy pequeña, por lo que no se tendrá en cuenta para realizar el cálculo de la probabilidad de transición.

Ahora, si se considera los cambios de variable

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2} + \Omega,$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2} - \Omega,$$

donde  $\Omega$  es el "detuning" de la frecuencia central  $\omega_0$  de transición, la suma de las integrales  $I_1 + I_2$  se puede expresar ahora como

$$I_1 + I_2 \approx \frac{e^{i(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} - \Omega)t} - 1}{(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} - \Omega)(\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2} - \Omega)} + \frac{e^{i(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} + \Omega)t} - 1}{(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} + \Omega)(\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2} + \Omega)} + \frac{1 - e^{i(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} - \Omega)t}}{(\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2} + \Omega)(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} - \Omega)} + \frac{1 - e^{i(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} + \Omega)t}}{(\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2} - \Omega)(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} + \Omega)}. \quad (2.33)$$

Al realizar el cálculo de la probabilidad, la cual corresponde a  $|c_n(t)|^2$ , se obtendrán los módulos cuadrados de los cuatro términos de esta suma de las integrales, más los términos cruzados provenientes de la multiplicación de cada término por el complejo conjugado de los demás. La suma de los módulos cuadrados de cada término son de la forma (promediando los senos cuadrados resultantes con respecto al tiempo)

$$\frac{1}{(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} - \Omega)^2 (\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2} - \Omega)^2} + \frac{1}{(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} + \Omega)^2 (\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2} + \Omega)^2} + \frac{1}{(\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2} + \Omega)^2 (\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} - \Omega)^2} + \frac{1}{(\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2} - \Omega)^2 (\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} + \Omega)^2}.$$

Unificando esta expresión tomando factores comunes y sumando las fracciones se puede llegar al siguiente término:

$$\frac{(\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2})^2 + \Omega^2}{\left[ (\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2})^2 - \Omega^2 \right]^2} \times \frac{(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2})^2 + \Omega^2}{\left[ (\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2})^2 - \Omega^2 \right]^2}. \quad (2.34)$$

Los términos cruzados correspondientes a los productos de los términos 1 y 2, 1 y 4, y 2 y 3 en la Ec. 2.31 producirán exponenciales de la forma

$$e^{\pm 2i\Omega t} - e^{\pm i(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} - \Omega)t} - e^{\mp i(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} + \Omega)t} + 1,$$

los cuales corresponden a oscilaciones rápidas que no contribuirán a la probabilidad, y que se podrán desprejciar en el cálculo. Con esto, los únicos términos cruzados que sobrevivirán son los correspondientes a los términos 1 y 3, y 2 y 4, los cuales tendrán la forma (nuevamente promediando con respecto al tiempo los senos cuadrados resultantes)

$$\frac{1}{(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} - \Omega)^2 \left[ (\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2})^2 - \Omega^2 \right]} + \frac{1}{(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2} + \Omega)^2 \left[ (\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2})^2 - \Omega^2 \right]}.$$

Nuevamente si se unifica esta expresión tomando factores comunes y sumando las fracciones se llega al término

$$\frac{(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2})^2 + \Omega^2}{\left[ (\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2})^2 - \Omega^2 \right] \left[ (\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2})^2 - \Omega^2 \right]^2}. \quad (2.35)$$

Si comparamos las Ecs. 2.32 y 2.33, vemos que la primera es mucho más pequeña en orden de magnitud comparado con la segunda, por lo que en la probabilidad de transición dominará el término de la Ec. 2.33, permitiendo despreciar el de la Ec. 2.32, y así finalmente escribir la probabilidad de transición  $P(\Omega)$  como

$$P(\Omega) = \frac{1}{\hbar^4} \sum_{m,j} v_{fm}^\dagger v_{mi}^\dagger v_{ij}^\dagger v_{jf}^\dagger \sum_m \frac{(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2})^2 + \Omega^2}{\left[ (\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2})^2 - \Omega^2 \right] \left[ (\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2})^2 - \Omega^2 \right]^2}. \quad (2.36)$$

Usando la Ec. 2.27 y la notación introducida en la Ec. 2.10 para los elementos matriciales, esta expresión de la probabilidad se puede reescribir como

$$P(\Omega) = \left( \frac{eE_0}{2\hbar} \right)^4 \left( \sum_{m,j} \mu_{ij} \mu_{jf} \mu_{fm} \mu_{mi} \right) \left( \sum_m \frac{(\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2})^2 + \Omega^2}{\left[ (\omega_{mi} - \frac{\omega_0}{2})^2 - \Omega^2 \right] \left[ (\omega_{fm} - \frac{\omega_0}{2})^2 - \Omega^2 \right]^2} \right).$$

De forma que, usando los mismos valores para los elementos matriciales  $\mu$  y frecuencias  $\omega_{mi}$  y  $\omega_{fm}$  presentes en las Tablas 2.1, 2.2 y 2.3, se puede graficar esta probabilidad obteniendo lo que se muestra en la Fig. 2.4:

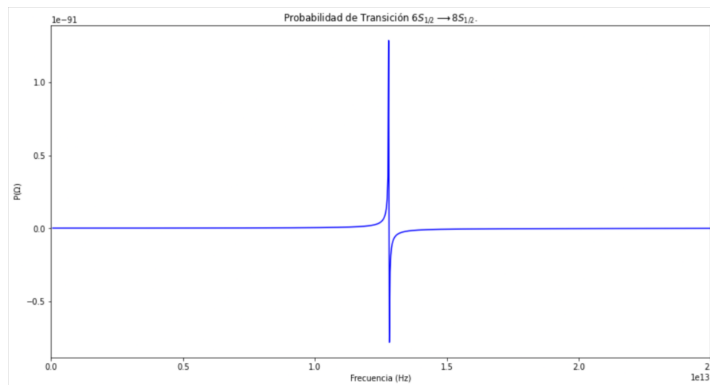


Figura 2.4: Gráfica de la probabilidad de transición por interacción 2PA para la transición  $6S_{1/2} \rightarrow 8S_{1/2}$  en el átomo de Cesio. El eje x corresponde a la frecuencia del "detuning"  $\Omega$ . El eje y corresponde a la probabilidad  $P(\Omega)$ .

El comportamiento gráfico obtenido es esperado para la región en la que la probabilidad se convierte en un pico casi divergente, pues es de esperar que al acercarse a la frecuencia de resonancia mediante el detuning, la probabilidad de transición incremente rápidamente y que al alejarse empiece a decrecer, sin embargo aún no es del todo claro la física detrás del pico que decrece negativamente y el orden de magnitud de la probabilidad.

# Capítulo 3

## Conclusiones y Perspectiva

Los resultados obtenidos en el capítulo anterior para el cálculo de la probabilidad de transición para el caso del 2PA no degenerado revelan un poco de la física que se esperaría para el comportamiento de la excitación del átomo al absorber dos fotones cuya frecuencia en este caso es distinta, en especial comparándola con lo obtenido para el caso degenerado. Sin embargo, el panorama para lograr un mayor entendimiento teórico de este proceso aún es amplio, pues como se destacó, es importante introducir en los cálculos el hecho de la no simultaneidad en el proceso de absorción de ambos fotones y tener en cuenta esa diferencia de tiempo de llegada de estos al núcleo.

Es importante analizar con mayor detenimiento las aproximaciones aplicadas para llegar al cálculo de la probabilidad de transición, dado que, aunque físicamente tiene sentido aplicarlas, puede el desprestigiar alguno de los términos descartados en el cálculo ofrezca una contribución, pequeña, pero importante que afecte de alguna forma el comportamiento gráfico de la probabilidad mostrado en la Fig. 2.4 y que tal vez ayuden a entender mejor los picos de probabilidad obtenidos y la escala para dicha probabilidad.

Cabe destacar que, una vez obtenida una mayor comprensión sobre la probabilidad de transición para el 2PA no degenerado, se puede asumir el reto algebraico de intentar realizar el cálculo de la sección eficaz de absorción  $\sigma^{(2)}$  para el caso desarrollado en el presente trabajo y analizar los resultados obtenidos contrastándolos con los resultados del caso degenerado.

Por otro lado, todo el desarrollo presentado en el capítulo anterior se hizo bajo la suposición de que ambos modos de oscilación del campo eléctrico tenían la misma polarización, por lo que sería interesante analizar que pasa en el caso en que la polarización es distinta, observar los efectos de este cambio en los elementos matriciales del operador dipolar eléctrico, y ver como se comporta la probabilidad de transición, y por ende la sección eficaz de absorción, en función de este cambio.

Por último, resultaría interesante diseñar un montaje experimental en el que se implemente una fuente de pares de fotones no degenerados que permitan realizar el estudio del 2PA en átomos de Cesio para este caso, y así poder contrastar los resultados obtenidos experimentalmente con lo predicho por la teoría desarrollada con todas las consideraciones mencionadas en los párrafos anteriores.





# Bibliografía

- [1] Maria Cristina Rumi y Joseph W. Perry. “Two-photon absorption: An overview of measurements and principles”. En: *Advances in Optics and Photonics* 2.4 (2010), pág. 451. DOI: [10.1364/aop.2.000451](https://doi.org/10.1364/aop.2.000451).
- [2] M. Göppert-Mayer. “Elementary processes with two quantum transitions”. En: *Annalen der Physik* 18.7-8 (2009), págs. 466-479. DOI: [10.1002/andp.200910358](https://doi.org/10.1002/andp.200910358).
- [3] Milosz Pawlicki y col. “Cheminform abstract: Two-photon absorption and the design of two-photon dyes”. En: *ChemInform* 40.30 (2009). DOI: [10.1002/chin.200930240](https://doi.org/10.1002/chin.200930240).
- [4] W. Kaiser y C. G. Garrett. “Two-photon excitation in  $\text{CaF}_2:\text{Eu}^{2+}$ ”. En: *Physical Review Letters* 7.6 (1961), págs. 229-231. DOI: [10.1103/physrevlett.7.229](https://doi.org/10.1103/physrevlett.7.229).
- [5] I. D. Abella. “Optical double-photon absorption in cesium vapor”. En: *Physical Review Letters* 9.11 (1962), págs. 453-455. DOI: [10.1103/physrevlett.9.453](https://doi.org/10.1103/physrevlett.9.453).
- [6] C. Xu y W. W. Webb. “Multiphoton excitation of molecular fluorophores and Nonlinear Laser Microscopy”. En: *Topics in Fluorescence Spectroscopy* (2002), págs. 471-540. DOI: [10.1007/0-306-47070-5\\_11](https://doi.org/10.1007/0-306-47070-5_11).
- [7] J. C. Bedoya. “Medida de sección eficaz de absorción de dos fotones en moléculas orgánicas”. En: *Tesis de Pregrado, Universidad de los Andes* (2021).
- [8] J. Chen, P. Chabera y D. Liu. “Size- and wavelength-dependent two-photon absorption cross-section of CSPBBR3 perovskite quantum dots”. En: *Physical Chemistry Letters* (mayo de 2017). DOI: [10.1021/acs.jpcllett.7b00613.s001](https://doi.org/10.1021/acs.jpcllett.7b00613.s001).
- [9] Hanghang Yu y col. “Theoretical modeling and analysis on the absorption cross section of the two-photon excitation in Rb”. En: *Optics Express* 26.13 (2018). comentario de prueba, pág. 17254. DOI: [10.1364/oe.26.017254](https://doi.org/10.1364/oe.26.017254).
- [10] C.J Foot. *Atomic physics*. Oxford University Press, 2005.
- [11] D. Steck. *Cesium D Line Data*. Jun. de 1998. URL: <https://steck.us/alkalidata/>.
- [12] Miguel Ángel Gonzalez Jaimes. “Caracterización de absorción de dos fotones en átomos de Cesio”. En: (2021).
- [13] Michael Bass. *Handbook of Optics. fundamentals, techniques, and design*. McGraw-Hill, 1995.
- [14] R.C Davila. “Two-Photon Excitation of Cesium Alkali Metal Vapor 72D, 82D Kinetics and Spectroscopy”. En: *Air Force Institute of Technology* (2018).

- [15] V. Gerginov. “Optical Frequency Measurements of  $6s^2S_{1/2} - 6p^2P_{1/2}$  ( $D_1$ ) Transitions in  $^{133}\text{Cs}$  and Their Impact on the Fine-Structure Constant”. En: *Phys. Rev. A* 73 (2006).
- [16] V. Gerginov y col. “High resolution spectroscopy with a femtosecond laser frequency comb”. En: (*CLEO*). *Conference on Lasers and Electro-Optics, 2005*. (2005). DOI: [10.1109/cleo.2005.202088](https://doi.org/10.1109/cleo.2005.202088).
- [17] K. Herbert. “Interferometric measurements of cesium I\*”. En: *Journal of the Optical Society of America* 52.4 (1962), pág. 441. DOI: [10.1364/josa.52.000441](https://doi.org/10.1364/josa.52.000441).
- [18] Craig J. Sansonetti y Kenneth L. Andrew. “Spectrum and energy levels of singly ionized cesium: I revision and extension of the CS II Energy Levels”. En: *Journal of the Optical Society of America B* 3.3 (1986), pág. 386. DOI: [10.1364/josab.3.000386](https://doi.org/10.1364/josab.3.000386).
- [19] P. Fendel y col. “Two-photon frequency comb spectroscopy of the  $6S-8s$  transition in Cesium”. En: *Optics Letters* 32.6 (2007), pág. 701. DOI: [10.1364/ol.32.000701](https://doi.org/10.1364/ol.32.000701).